

ОСНОВИ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

**С.О.Абрамов, Г.Г.Гнезділова,
О.М.Капустіна, М.І.Селюн**

ЗАДАЧІ ПО ПРОГРАМУВАННЮ

**м.Тараща
2003 р.**

ПЕРЕДМОВА

Пропоновані вправи дають матеріал для самостійних занять і для практики роботи на обчислювальних машинах. Діапазон складності вправ досить широкий.

Формулювання більшості вправ універсальні в тім, що для написання програм можуть використовуватися різноманітні мови програмування, а самі програми можуть виконуватися на різних обчислювальних машинах. Лише невелика частина вправ (зокрема, вправи по графіці і звукогенерації) вимагає залучення спеціального устаткування і засобів програмування.

У книзі немає розв'язку вправ, і головна причина цього складається саме у відсутності орієнтації на конкретну мову програмування. Указівки до деяких вправ підвищеної складності і обговорення деяких нетрадиційних питань включені в текст вправ.

Більшість вправ, включених у збірник, придумано авторами. При звертанні до наявної літератури (список приводиться наприкінці книги) автори часто запозичали ідею з вправи, але деталі її умови і формулювання змінювалися.

Рекомендується виконувати вправи із цього збірника в якості додаткових завдань для складання обчислювальних алгоритмів на заняттях по вивченню правил алгоритмічної мови та вивченні мов програмування Бейсик та Паскаль.

Для викладачів основ інформатики і обчислювальної техніки.

Для програмістів-початківців, учнів шкіл, студентів коледжів та технікумів, студентів вузів, користувачів ЕОМ.

Задачі взяті з збірника С.О.Абрамов, Г.Г.Гнезділова, О.М.Капустіна, М.І.Селюн “Задачі по программированию”, Москва, “НАУКА”, 1988 р.

Переклали українською мовою:

В.В.Іценко та В.О.Іценко – викладачі інформатики Таращанської гімназії “ЕРУДИТ”.

Україна
09500 Київська область
м.Тараща
вул. Шевченка, 39
Таращанська гімназія “ЕРУДИТ”
тел. (04566) 5 – 17 – 99
E-mail: itsenko@mail.ru

Частина 1

Основні прийоми програмування

§ 1. Арифметика дійсних чисел. Обчислення за формулами.

Вправа №1. ● ● ● Дано два дійсних числа a і b . Отримати їх суму, різницю і добуток.

Вправа №2. ● ● ● Дано дійсні числа x і y . Отримати

$$\frac{|x| - |y|}{1 + |xy|}$$

Вправа №3. ● ● ● Дано довжина ребра куба. Знайти об'єм куба і площу його бічної поверхні.

Вправа №4. ● ● ● Дані два дійсні додатні числа. Знайти середнє арифметичне, середнє геометричне цих чисел.

Вправа №5. ● ● ● Дано два дійсних числа. Знайти середнє арифметичне цих чисел і середнє геометричне їх модулів.

Вправа №6. ● ● ● Дані катети прямокутного трикутника. Знайти його гіпотенузу і площу.

Вправа №7. ● ● ● Змішано v_1 літрів води температури t_1 з v_2 літрами води температури t_2 . Знайти об'єм і температуру утвореної суміші.

Вправа №8. ● ● ● Визначити периметр правильного n -кутника, описаного навколо кола радіуса r .

Вправа №9. ● ● ● Три опори R_1, R_2, R_3 з'єднані паралельно. Знайти опір з'єднання.

Вправа №10. ● ● ● Визначити час падіння каменю на поверхню землі з висоти h .

Вправа №11. Дано x, y, z . Знайти a, b якщо

$$a) \ a = \frac{\sqrt{|x-1|} - \sqrt[3]{|y|}}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}}, \quad b = x(\arctg z + e^{-(x+3)});$$

$$\text{б) } a = \frac{3 + e^{y-1}}{1 + x^2 |y - \operatorname{tg} z|}, \quad b = 1 + |y - x| + \frac{(y - x)^2}{2} + \frac{|y - 3|^2}{3};$$

$$\text{в) } a = (1 + y) \frac{x + \frac{y}{x^2 + 4}}{e^{-x-2} + \frac{1}{x^2 + 4}}, \quad b = \frac{1 + \cos(y - 2)}{\frac{x^4}{2} + \sin^2 z};$$

$$\text{г) } a = y + \frac{x}{y^2 + \frac{x^2}{y + \frac{x^3}{3}}}, \quad b = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2};$$

$$\text{д) } a = \frac{2 \cos(x - \frac{\pi}{6})}{\frac{1}{2} + \sin^2 y}, \quad b = 1 + \frac{z^2}{3 + \frac{z^2}{2}};$$

$$\text{е) } a = \frac{1 + \sin^2(x + y)}{2 + \left| x - \frac{2x}{1 + x^2 y^2} \right|} + x, \quad b = \cos^2(\operatorname{arctg} \frac{1}{z});$$

$$\text{ж) } a = \ln \left| (y - \sqrt{|x|}) \cdot \left(x - \frac{y}{z + \frac{x^2}{2}} \right) \right|, \quad b = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Вправа №12. ● ● ● Дано сторону рівностороннього трикутника. Знайти площу цього трикутника.

Вправа №13. ● ● ● Визначити період коливання маятника довжиною l .

Вправа №14. ● ● ● Визначити силу притягання F між тілами масою m_1 і m_2 , які знаходяться на відстані r один від одного.

Вправа №15. ● ● ● Дано гіпотенузу і катет прямокутного трикутника. Знайти другий катет і радіус вписаного кола.

Вправа №16. ● ● ● Відома довжина кола. Знайти площу круга, обмеженого цим колом.

Вправа №17. ● ● ● Знайти площу кільця, внутрішній радіус якого дорівнює 20, а зовнішній — даному числу r ($r > 20$).

Вправа №18. ● ● ● Трикутник заданий величинами своїх кутів і радіусом описаного кола. Знайти сторони трикутника.

Вправа №19. ● ● ● Визначити час, через який зустрінуться два тіла, які рухаються рівноприскорено назустріч один одному, якщо відомі їх початкові швидкості, прискорення і початкова відстань між ними.

Вправа №20. ● ● ● Знайти суму членів арифметичної прогресії
 $a, a + d, \dots, a + (n - 1) * d$.
за даними значеннями a, d, n .

Вправа №21. ● Дані дійсні числа c, d . Обчислити

$$\left| \frac{\sin^3 |cx_1^2 + dx_2^2 - cd|}{\sqrt{(cx_1^3 + dx_2^2 - x_1)^2 + 3.14}} \right| + \operatorname{tg}(cx_1^2 + dx_2^2 - x_1),$$

де x_1 – більший, а x_2 – менший корені рівняння $x^2 - 3x - |cd| = 0$.

Вправа №22. ● ● ● Знайти площу рівнобічної трапеції з основами a і b , і кутом A при більшій основі a .

Вправа №23. ● ● ● Трикутник задано довжинами сторін. Знайти:

- а) довжини висот;
- б) довжини медіан;
- в) довжини бісектрис ;
- г) радіуси вписаного і описаного кола .

Вправа №24. ● ● ● Обчислити відстань між двома точками з координатами x_1, y_1 і x_2, y_2 .

Вправа №25. Трикутник заданий координатами своїх вершин . Знайти

- а) периметр трикутника ;
- б) площу трикутника .

Вправа №26. ● ● ● Найти площу сектора, радіус якого 13,7, а дуга містить задане число радіан φ .

Вправа №27. ● ● ● Дані дійсні додатні числа a, b, c . По трьох сторонах з довжиною a, b, c . можна побудувати трикутник . Знайти кути трикутника.

Вправа №28. ● ● ● Дано дійсне число x . Не виконуючи ніяких інших арифметичних операцій, крім множення, додавання і віднімання, обчислити
 $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

Дозволяється виконувати не більше чотирьох множень і чотирьох додавань і віднімань.

Вправа №29. ● ● ● Дані дійсні числа x, y . Не виконуючи ніяких операцій крім множення, додавання і віднімання, обчислити

$$3x^2y^2 - 2xy^2 - 7x^2y - 4y^2 + 15xy + 2x^2 - 3x + 10y + 6.$$

Дозволяється виконувати не більше восьми множень і восьми додавань і віднімань.

Вправа №30. ● ● ● Дано дійсне число x . Не виконуючи ніякими операціями крім множення, додавання і віднімання, обчислити

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \text{ і } 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3.$$

Дозволяється виконувати не більше восьми операцій.

Вправа №31. ● ● ● Дано дійсне число a . Не виконуючи ніяких операцій крім множення, отримати:

- а) a^4 за дві операції;
- б) a^6 за три операції;
- в) a^7 за чотири операції;
- г) a^8 за три операції;
- д) a^9 за чотири операції;
- е) a^{10} за чотири операції;
- ж) a^{13} за п'ять операцій;
- з) a^{15} за п'ять операцій;
- і) a^{21} за шість операцій;
- к) a^{28} за шість операцій;
- л) a^{64} за шість операцій.

Вправа №32. ● ● ● Дано дійсне число a . Не користуючись ніякими іншими арифметичними операціями, крім множення, отримати:

- а) a^3 і a^{10} за чотири операції;
- б) a^4 і a^{20} за п'ять операцій;
- в) a^5 і a^{13} за п'ять операцій;
- г) a^5 і a^{19} за п'ять операцій;
- д) a^2, a^5, a^{17} за шість операцій;
- е) a^4, a^{12}, a^{28} за шість операцій.

§ 2. Розгалуження

Вправа №33. ● Дані дійсні числа x, y . Отримати:

- а) $\max(x, y)$;
- б) $\min(x, y)$;
- в) $\max(x, y), \min(x, y)$.

Вправа №34. ● Дані дійсні числа x, y, z . Обчислити:

- а) $\max(x, y, z)$;
- б) $\min(x, y, z), \max(x, y, z)$.

Вправа №35. ● Дані дійсні числа x, y, z . Обчислити:

- а) $\max(x + y + z, xyz)$;
- б) $\min^2(x + y + z/2, xyz) + 1$.

Вправа №36. ● ● ● Дані дійсні числа a, b, c . Перевірити чи виконується нерівність $a < b < c$.

Вправа №37. ● ● ● Дані дійсні числа a, b, c . Подвоїти ці числа, якщо $a \geq b \geq c$, і замінити їх абсолютними значеннями, якщо це не так.

Вправа №38. ● ● ● Дані дійсні числа x, y . Обчислити z :

$$Z = \begin{cases} x - y & \text{якщо } x > y, \\ y - x + 1 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Вправа №39. ● ● ● Дано два дійсних числа. Вивести перше число, якщо воно більше від другого, і обидва числа, якщо це не так.

Вправа №40. ● ● ● Дано два дійсних числа. Замінити перше число нулем, якщо воно менше або рівне другому, і залишити числа без змін в іншому випадку.

Вправа №41. ● ● ● Дано три дійсних числа. Вибрати ті з них, які належать інтервалу $(1, 3)$.

Вправа №42. ● ● ● Дано дійсні числа x, y ($x < > y$). Менше з цих двох чисел замінити їх напівсумою, а більше - їх подвоєним добутком.

Вправа №43. ● ● ● Дано три дійсних числа. Піднести до квадрату ті з них, значення яких невід'ємні.

Вправа №44. ● ● ● Якщо сума трьох попарно різних дійсних чисел x, y, z менше від одиниці, то найменше з цих трьох чисел замінити напівсумою двох інших; в іншому випадку замінити менше з x і y напівсумою двох значень які залишились.

Вправа №45. ● ● ● Дано дійсні числа a, b, c, d . Якщо $a \leq b \leq c \leq d$, то кожне число замінити найбільшим з них; якщо $a > b > c > d$, то числа залишити без змін; в іншому випадку всі числа замінюють на їх квадрати.

Вправа №46. ● ● ● Дано дійсні числа x, y . Якщо x та y від'ємні, то кожне значення замінити його модулем; якщо від'ємне тільки одне з них, то обидва значення збільшити на 0,5; якщо обидва значення невід'ємні і жодне з них не належить відрізку $(0,5,2,0)$, то обидва значення зменшити у 10 разів; в інших випадках x і y залишити без змін.

Вправа №47. ● ● ● Дано дійсні додатні числа x, y, z .

- а) з'ясувати, чи існує трикутник з довжинами сторін x, y, z .
 б) Якщо трикутник існує, то відповісти – чи являється він гострокутним.

Вправа №48. ● ● ● Дано дійсні числа a, b, c ($a \neq 0$). Визначити, чи має рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дійсні корені. Якщо дійсні корені існують, то знайти їх. В іншому випадку відповіддю є повідомлення, що дійсних коренів нема.

Вправа №49. Дано дійсне число h . Встановити, чи має рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дійсні корені, якщо

$$a = \sqrt{\frac{|\sin 8h| + 17}{(1 - \sin 4h \cos(h^2 + 18))^2}},$$

$$b = 1 - \sqrt{\frac{3}{3 + |\operatorname{tg} ah|^2 - \sin ah}},$$

$$c = ah^2 \sin bh + bh^2 \cos ah.$$

Якщо дійсні корені існують, то знайти їх. В іншому випадку відповіддю повинно бути повідомлення, що дійсних коренів не існує.

Вправа №50. Дано дійсні числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. Встановити, чи вірно, що $|a_1 b_2 - a_2 b_1| \geq 0,0001$, і якщо вірно, то знайти розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

(при виконанні описаної нерівності система зарані сумісна і має єдине рішення).

Вправа №51. Дано дійсні числа a, b, c ($a \neq 0$). Повністю дослідити біквадратне рівняння $ax^4 + bx^2 + c = 0$, тобто якщо дійсні корені відсутні, то повинно бути видано повідомлення про це, інакше повинні бути видані два або чотири корені.

Вправа №52. Дано дійсні числа a, b, c, d, s, t, u (s і t одночасно не дорівнюють нулю). Відомо, що точки (a, b) і (c, d) не лежать на прямій l , яка задана рівнянням $sx + ty + u = 0$. Пряма l розбиває координатну площину на дві напівплощини. Встановити, чи вірно, що точки (a, b) і (c, d) належать різним напівплощинам^{*}).

Вправа №53. Дано дійсні числа a, b, c, d, e, f, g, h . Відомо, що точки (e, f) і (g, h) різні. Відомо також, що точки (a, b) і (c, d) не лежать на прямій l , яка проходить через точки (e, f) і (g, h) . Пряма l розбиває координатну площину на дві півплощини. З'ясувати, чи вірно, що точки (a, b) і (c, d) належать одній і тій півплощині^{**}).

^{*}) В цій задачі, як і в ряді наступних задач, потрібно скористатись тим, що дві точки (a, b) і (c, d) , не лежать на прямій, визначеній рівнянням $sx + ty + u = 0$, належать одній півплощині, якщо $sa + tb + u = 0$ і $sc + td + u$ – числа одного знака. Справедливий і більш загальний факт: якщо рівняння $F(x, y) = 0$ означає пряму або криву, яка розбиває координатну площину на дві частини, то точки (a, b) і (c, d) , які не лежать на одній лінії, належать одній і тій же частині площини, якщо $F(a, b)$ і $F(c, d)$ – числа одного знака.

^{**}) В цій задачі, як і в ряді наступних задач, потрібно скористатись тим, що рівняння прямої, яка проходить через дві різні точки (e, f) і (g, h) , є рівняння $(x-e)(h-f) - (y-f)(g-e) = 0$.

Вправа №54. Дані дійсні числа $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$. Чи належить початок координат трикутнику з вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?

Вправа №55. Дано дійсні додані числа a, b, c, d . Встановити, чи можна прямокутник з сторонами a, b вмістити всередині прямокутника c, d так, щоб кожна з сторін одного прямокутника була паралельна або перпендикулярна кожній стороні іншого прямокутника.

Вправа №56. Дано дійсні додані числа a, b, c, x, y . Встановити, чи пройде цеглина з ребрами a, b, c в прямокутний отвір з сторонами x, y . Просовувати цеглину в отвір дозволяється тільки так, щоб кожне з його ребер було паралельне або перпендикулярне кожній з сторін отвору.

Вправа №57. Дано дійсне число a . Обчислити $f(a)$, якщо

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{при } -2 \leq x < 2, \\ 4 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \\ \text{б)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 + 4x + 5 & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{1}{x^2 + 4x + 5} & \text{в інших випадках;} \end{cases} \\ \text{в)} \quad f(x) &= \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ x^4 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \\ \text{г)} \quad f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 - x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - \sin \pi x^2 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \end{aligned}$$

Вправа №58. Дано дійсне число a . Для функцій $f(x)$, графіки яких представлені на рис. 1, $a - 1, \varepsilon$, обчислити $f(a)$.

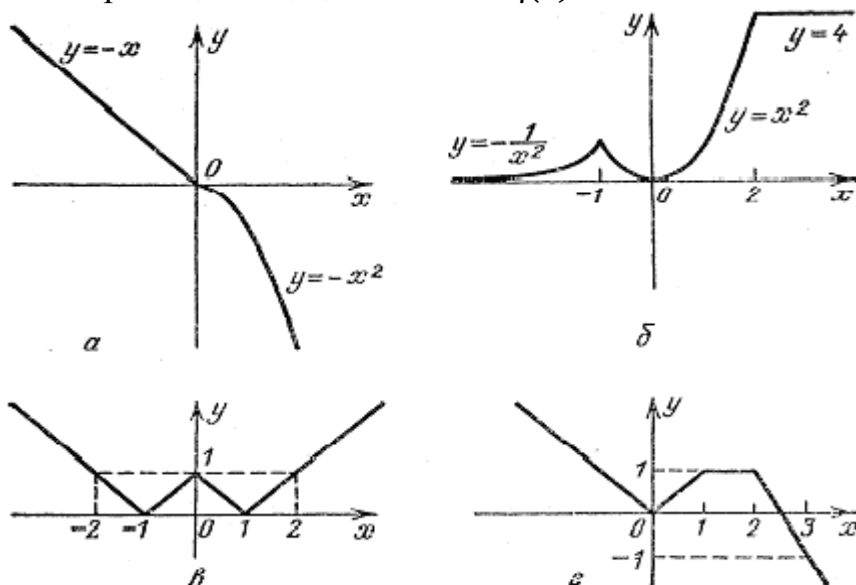


Рис. 1

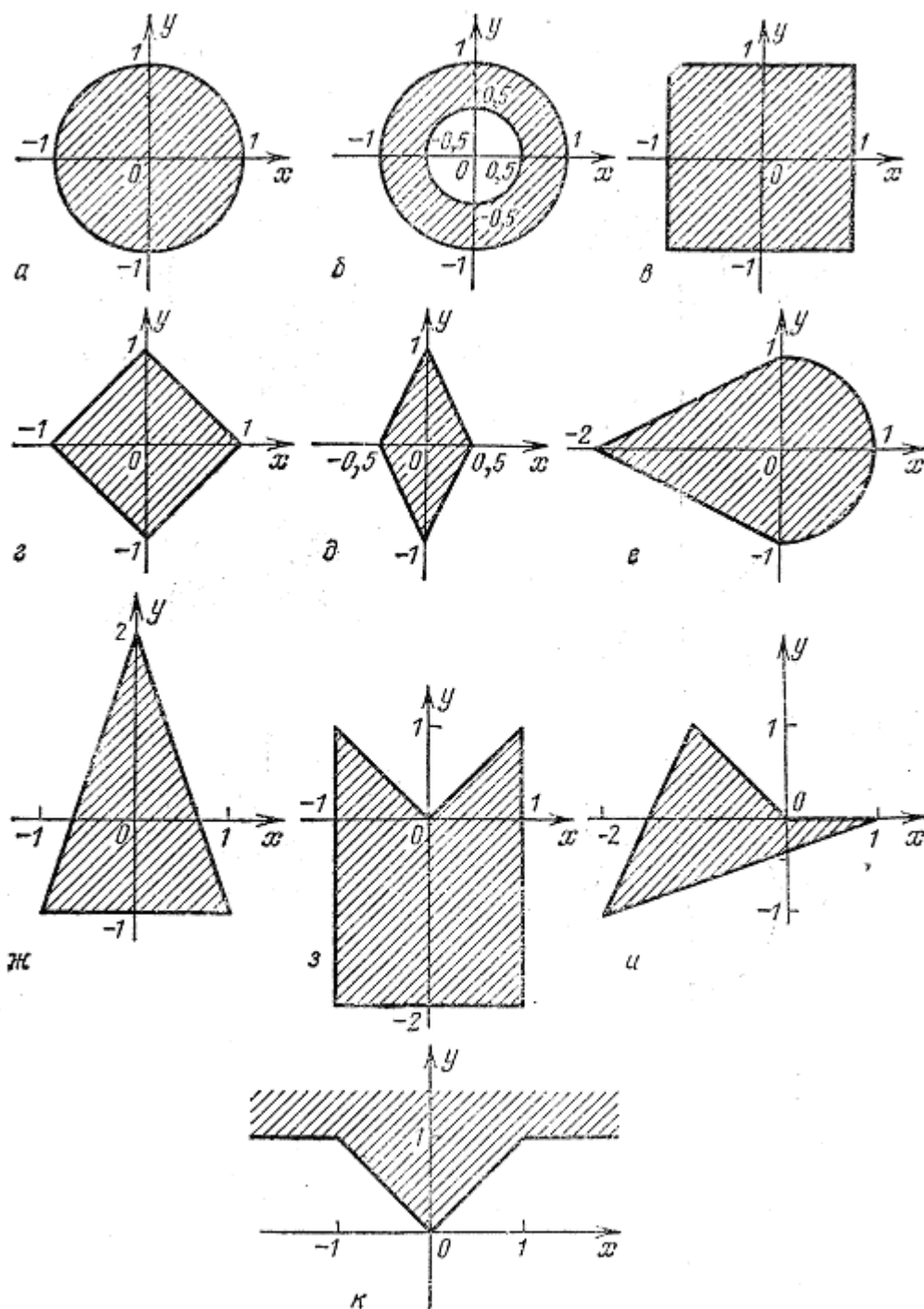


Рис. 2

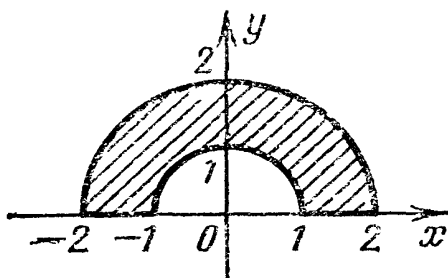
Вправа №59. Дано дійсні числа x , y . Визначити, чи належить точка з координатами x , y заштрихованій частині площини (Рис. 2, а – 2, к).

Вправа №60. Нехай D – заштрихована частина площини (Рис. 3, а – 3, е) і нехай u визначається по x і y таким чином (запис $(x, y) \in D$ означає, що точка з координатами x , y належить D):

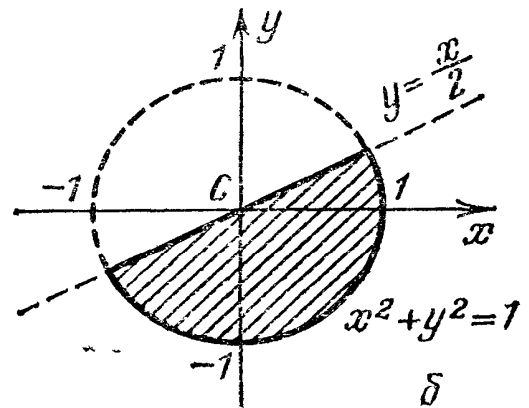
$$\begin{aligned} \text{а) } u &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } (x, y) \in D, \\ x & \text{в інших випадках;} \end{cases} \\ \text{б) } u &= \begin{cases} -3, & \text{якщо } (x, y) \in D, \\ y^2 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad u &= \begin{cases} x-y, & \text{якщо } (x,y) \in D, \\ xy+7 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \\
 \text{г)} \quad u &= \begin{cases} x^2-1, & \text{якщо } (x,y) \in D, \\ \sqrt{|x-1|} & \text{в інших випадках;} \end{cases} \\
 \text{д)} \quad u &= \begin{cases} \sqrt{|x^2-1|}, & \text{якщо } (x,y) \in D, \\ x+y & \text{в інших випадках;} \end{cases} \\
 \text{е)} \quad u &= \begin{cases} x+y, & \text{якщо } (x,y) \in D, \\ x-y & \text{в інших випадках.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

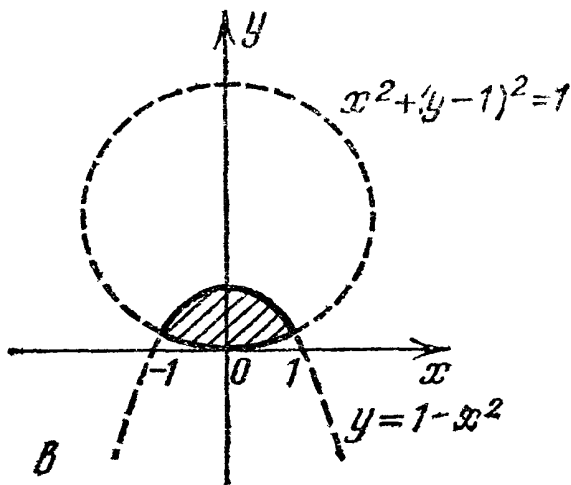
Дано дійсні числа x, y . Визначити u .



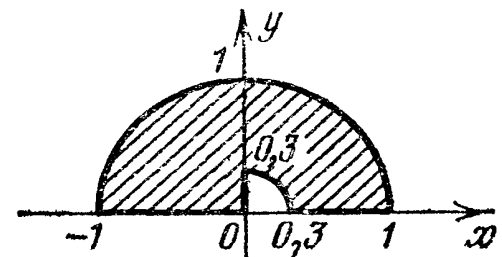
a



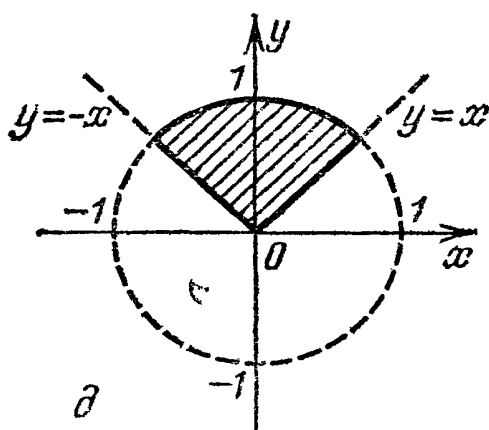
б



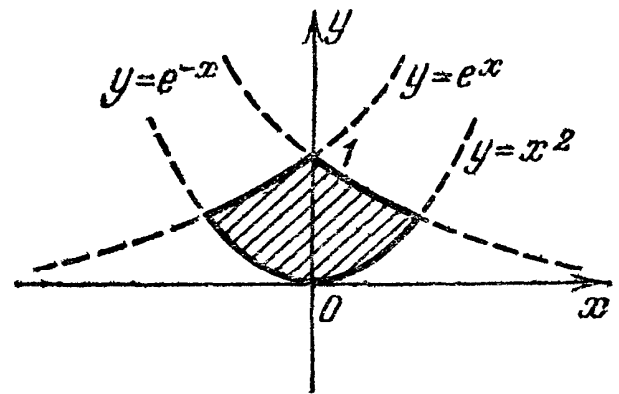
в



г



д



е

Рис. 3

§ 3. НАЙПРОСТІША ЦІЛОЧИСЕЛЬНА АРИФМЕТИКА.

ВПРАВА №61. ● ● ● Дано дійсне число x . Знайти цілу частину^{*}) числа x ; потім – число x , округлене до найближчого цілого; потім – число x без дробових цифр.

ВПРАВА №62. ● ● ● Визначить, чи являється дане ціле число парне.

ВПРАВА №63. ● ● ● Визначить, чи вірно, що при діленні невід'ємного цілого числа a на додатне ціле число b одержується залишок, рівний одному з двох чисел r або s .

ВПРАВА №64. ● ● ● Дано натуральне число n ($n > 99$). Визначити число сотень в ньому.

ВПРАВА №65. ● ● ● Дано натуральне число ($n \leq 99$). Встановити, чи вірно, що n^2 рівне кубу суми цифр числа n .

ВПРАВА №66. ● ● ● Дані цілі числа k, m , дійсні числа x, y, z . При $k < m^2$, $k = m^2$ або $k > m^2$ замінити модулем відповідно значення x, y або z , а два інших значення зменшити на 0.5.

ВПРАВА №67. ● ● ● Дано натуральне число n ($n \leq 100$).

- Скільки цифр в числі n ?
- Чому дорівнює сума його цифр?
- Знайти останню цифру числа n .
- Знайти першу цифру числа n .
- Передбачається, що $n \geq 10$, знайти передостанню цифру числа n .

Вправа №68. ● ● ● Дано натуральне числа n ($n \leq 9999$).

- Чи є це число паліндромом (перевертнем) з урахуванням чотирьох цифр, як, наприклад, числа 2222, 6116, 0440 і т.д.
- Чи правда, що це число має рівно три однакові цифри, як, наприклад, числа 6676, 4544, 0006 і т. д.?
- чи правда, що всі чотири цифри числа різні?

Вправа №69. ● ● ● Годинникова стрілка що створює кут φ з променем, який проходить через центр і через точку, яка відповідає 12 годинам на циферблаті, $0 < \varphi \leq 2\pi$. Визначити значення кута для хвилинної стрілки, а також кількість годин і повних хвилин.

Вправа №70. ● ● ● Дано цілі числа m, n ($0 < m \leq 12$, $0 \leq n < 60$), показуючи момент часу: “ m годин, n хвилин”. Визначити найменший час (кількість повних хвилин), який повинен пройти до того моменту, коли годинна і хвилинна стрілки на циферблаті:

- співпадуть;
- розмістяться перпендикулярно.

^{*}) Цілою частиною x , що позначається $[x]$, називається найбільше ціле, що не перевершує x ; так, $[3.14]=3$, $[3]=3$, $[-3.14]=-4$, $[-3]=-3$.

Вправа №71. Дано дійсне число a . Визначить $f(a)$, де f – періодична функція з періодом 1.5, яка співпадає на відрізку $[0, 1.5]$:

а) з функцією $x^3 - 2.25x$;

б) з функцією, графік якої показаний на Рис. 4.

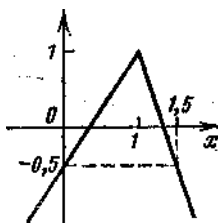


Рис.4

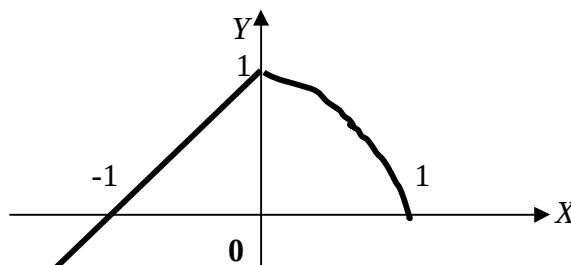


Рис.5

Вправа №72. Дано дійсне число a . Обчислити $f(a)$, де f – періодична функція з періодом 2, що співпадає на проміжку $[-1, 1]$:

а) для функції $-x^2 + 1$;

в) для функції, графік якої зображено на Рис. 5.

Вправа №73. ● ● ● Дано цілі числа k, l . Якщо числа не рівні, то замінивши кожне з них на одне й те ж число, що дорівнюватиме більшому з вихідних, а якщо рівні, то замінити числа нулями.

Вправа №74. ● ● ● Дано натуральне число n ($n \leq 100$), що визначає вік людини (в роках). Надати для цього числа ім'я "рік", "року", "років": наприклад, 1 рік, 23 роки, 45 років і т. д.

Вправа №75. Довести, що будь-яку цілочисельну грошову суму, більшу від 7 грн., можна виплатити без здачі троячками і п'ятірками. Для даного $n > 7$ знайти таке ціле невід'ємне a і b , що $3a + 5b = n$.

Вправа №76. ● Поле шахової дошки визначається парою натуральних чисел, кожне з яких не перебільшує восьми: перше число – номер вертикалі (рахуючи зліва направо), друге – номер горизонталі (рахуючи знизу вгору). Дані натуральні числа k, l, m, n , кожне з яких не перебільшує восьми. Необхідно:

- З'ясувати, чи є поля (k, l) і (m, n) полями одного кольору.
 - На полі (k, l) розміщений ферзь. Чи загрожує він полю (m, n) ?
 - Аналогічно б), але ферзь замінюється на коня.
 - Встановити, чи можна з поля (k, l) одним ходом тури потрапити на поле (m, n) . Якщо ні, то встановити, як це можна зробити за два ходи (вказати поле, на яке приводить перший хід).
 - Аналогічно г), але тура замінюється на ферзя.
 - Аналогічно г), але тура замінюється на слона.
- Передбачається, що вказані поля мають один і той же колір.

§ 4. Найпростіші цикли

Вправа №77. ● Дано натуральне число n . Обчислити:

а) 2^n .

б) $n!$

в) $(1 + \frac{1}{1^2})(1 + \frac{1}{2^2}) \dots (1 + \frac{1}{n^2})$;

г) $\frac{1}{\sin 1} + \frac{1}{\sin 1 + \sin 2} + \dots + \frac{1}{\sin 1 + \dots + \sin n}$;

д) $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ коренів}}$

е) $\frac{\cos 1}{\sin 1} * \frac{\cos 1 + \cos 2}{\sin 1 + \sin 2} * \dots * \frac{\cos 1 + \dots + \cos n}{\sin 1 + \dots + \sin n}$;

ж) $\sqrt{3 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{3 \cdot (n-1) + \sqrt{3n}}}}$

Вправа №78. ● Дано дійсне число a , натуральне число n . Обчислити:

а) a^n ;

б) $a(a+1) \dots (a+n-1)$;

в) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \dots + \frac{1}{a(a+1) \dots (a+n)}$;

г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^{2^n}}$;

д) $a(a-n)(a-2n) \dots (a-n^2)$.

Вправа №79. ● Обчислити $(1 + \sin 0,1)(1 + \sin 0,2) \dots (1 + \sin 10)$.

Вправа №80. Дано дійсне число x . Обчислити.

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}.$$

Вправа №81. Дано дійсні числа x, a , натуральне число n .

Обчислити: $\underbrace{((\dots ((x+a)^2 + a)^2 + \dots + a)^2 + a)}_{n \text{ дужок}}$

Вправа №82. ● Дано дійсне число x . Обчислити:

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-8) \dots (x-64)}{(x-1)(x-3)(x-7) \dots (x-63)}.$$

Вправа №83. ● Дано дійсне число a . Знайти:

а) серед чисел $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$ перше, більше a ;

б) таке найменше n , що $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > a$

Вправа №84. ● Дано натуральне n , дійсне x . Обчислити:

- а) $\sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x$;
- б) $\sin x + \sin x^2 + \dots + \sin x^n$;
- в) $\sin x + \sin \sin x + \dots + \underbrace{\sin \sin \dots \sin x}_n$

Вправа №85. Дано дійсні числа a, h , натуральне число n . Обчислити:

$$f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(a+nh),$$

де

$$f(x) = (x^2 + 1) \cos^2 x.$$

Вправа №86. ● ● ● Дано натуральне число n .

- а) Скільки цифр в числі n .
- б) Чому дорівнює сума його цифр?
- в) Знайти першу цифру числа n .
- г) Знайти знакочергуючу суму цифр числа n
(нехай запис n в десятковій системі є $\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_0$;
знайти $\alpha_k - \alpha_{k-1} + \dots + (-1)^k \alpha_0$).

Вправа №87. ● ● ● Дано натуральні числа n, m . Одержати суму m останніх цифр числа n .

Вправа №88. ● ● ● Дано натуральне число n .

- а) Встановити, чи входить цифра 3 в запис числа n^2 .
- б) Поміняти порядок цифр числа n на зворотній.
- в) Переставити першу і останню цифри числа n .
- г) Приписати по одиниці в початок і в кінець запису числа n .

Вправа №89. ● Алгоритм Евкліда знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) невід'ємних цілих чисел заснований на наступних властивостях цієї величини. Нехай m і n – одночасно не дорівнюють нулю цілі невід'ємні числа і нехай $m \geq n$. Тоді, якщо $n=0$, то $НСД(m, n) = m$, а якщо $n \neq 0$, то для чисел m, n і r , де r залишок від ділення m на n , виконується рівність $НСД(m, n) = НСД(m, r)$.

Наприклад, $НСД(15, 6) = НСД(6, 3) = НСД(3, 0) = 3$.

Дано натуральні числа m, n .

- а) Виконуючи алгоритм Евкліда, знайти найбільший спільний дільник n і m .
- б) Знайти найменше спільне кратне n і m . (Як тут може допомогти алгоритм Евкліда?)

Вправа №90. ● Дано натуральні числа m і n . Знайти такі натуральні p і q , які не мають спільних дільників, що $p/q = m/n$.

Вправа №91. Нехай

$$a_0 = 1, a_k = ka_{k-1} + 1/k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Дано натуральне число n . Одержати a_n .

Вправа №92. Нехай

$$v_1=v_2=0; \quad v_3=1,5;$$

$$v_i=\frac{i+1}{i^2+1}v_{i-1}-v_{i-2}v_{i-3} \quad i=4, 5, \dots$$

Вправа №93. Нехай

$$x_0=c; \quad x_1=d;$$

$$xx_k=qx_{k-1}+rx_{k-2}+b, \quad k=2, 3, \dots$$

Дано дійсні q, r, b, c, d , натуральне n ($n \geq 2$). Одержати x_n .

Вправа №94. Нехай

$$u_1=u_2=0; \quad v_1=v_2=1;$$

$$u_i=\frac{u_{i-1}-u_{i-2}v_{i-1}-v_{i-2}}{1+u_{i-1}^2+v_{i-1}^2}; \quad v_i=\frac{u_{i-1}-n_{i-1}}{|u_{i-2}+v_{i-1}|+2}, \quad i=3, 4, \dots$$

Дано натуральне n ($n \geq 3$). Одержати v_n .

Вправа №95. Нехай

$$a_0=a_1=1; \quad a_i=a_{i-2}+\frac{a_{i-1}}{2^{i-1}}, \quad i=2, 3, \dots$$

Знайти добуток $a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{14}$.

Вправа №96. Нехай $a_1=b_1=1;$ $a_i=\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_{i-1}}+\frac{1}{2}\sqrt{a_{i-1}}\right);$

$$b_k=2a_{k-1}^2+b_{k-1}, \quad k=2, 3, \dots$$

Дано натуральне n . Знайти $\sum_{k=1}^n a_k b_k^*$.

Вправа №97. Нехай

$$x_1=y_1=1; \quad x_i=0.3x_{i-1};$$

$$y_i=x_{i-1}+y_{i-1}, \quad i=2, 3, \dots$$

Дано натуральне n . Знайти $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+|y_i|}$.

Вправа №98. Нехай

$$a_1=b_1=1; \quad a_k=3b_{k-1}+2a_{k-1};$$

$$b_k=2a_{k-1}+b_{k-1}, \quad k=2, 3, \dots$$

Дано натуральне n . Знайти $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(1+a_k^2+b_k^2)k!}$.

*) Вираз $\sum_{i=1}^n a_k b_k$ є кратний запис суми $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$; взагалі, $\sum_{k=m}^n f_k$ означає при $n \geq m$ суму $f_m + \dots + f_n$ при $n < m$ вираз змісту не має.

Вправа №99. Нехай

$$a_1=u; \quad b_1=v; \quad a_k=2b_{k-1}+a_{k-1}; \\ b_k=2a_{k-1}+b_{k-1}, \quad k=2, 3, \dots$$

Дано дійсні u, v , натуральне n . Знайти

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{(k+1)!}.$$

Вправа №100. Нехай

$$x_1=x_2=x_3=1; \quad x_i=x_{i-1}+x_{i-3}, \quad i=4, 5, \dots$$

Знайти

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{x_i}{2^i}.$$

Вправа №101. Дано додатні дійсні числа a, x і ε . В послідовності $y_1, y_2, \dots$, утвореної по закону

$$y_0=a; \quad y_i=\frac{1}{2}\left(y_{i-1}+\frac{x}{y_{i-1}}\right), \quad i=1, 2, \dots,$$

знайти перший член y_n , для якого виконується нерівність $|y_n^2 - y_{n-1}^2| < \varepsilon$.

Вправа №102. Нехай

$$x_0=1; \quad x_k=\frac{2-x_{k-1}^3}{5}, \quad k=1, 2, \dots$$

Знайти перший член x_n , для якого $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-5}$.

Вправа №103. Нехай $y_0=0; \quad y_k=\frac{y_{k-1}+1}{y_{k-1}+2}, \quad k=1, 2, \dots$

Дано дійсне $\varepsilon > 0$. Знайти перший член y_n , для якого виконується нерівність $y_n - y_{n-1} < \varepsilon$.

Вправа №104. Дано дійсне $a > 0$. Послідовність $x_0, x_1, \dots$ утворена по закону

$$x_0 = \begin{cases} \min(2a, 0.95) & \text{при } a \leq 1, \\ \frac{a}{5} & \text{при } 1 < a < 25 \\ \frac{a}{25} & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$x_n = \frac{4}{5}x_{n-1} + \frac{a}{5x_{n-1}^4}, \quad n=1, 2, \dots$$

Знайти перший член x_n , для якого $\frac{5}{4}a|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$. Обчислити для знайденого значення x_n різницю $a - x_n^5$.

Вправа №105. Дано натуральне число n , дійсне число x . Обчислити:

а) $x^{n^2}/2^n$;

б) $x^{n^3}/3^n$.

Вправа №106. Дано дійсні числа a, b , натуральне n ($b > a$). Одержати $(f_1 + \dots + f_n)h$, де

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad f_i = \frac{a + (i - \frac{1}{2})h}{1 + (a - \frac{1}{2})h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вправа №107. Дано ціле число $m > 1$. Одержати найбільше ціле k , при якому $4^k < m$.

Вправа №108. Дано натуральне число n . Одержати найменше число виду 2^r , що перевершує n .

Вправа №109. Дано натуральне число n . Обчислити

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot 2n.$$

Вправа №110. Обчислити

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \dots}}}$$

$$\dots$$

$$101 + \frac{1}{103}.$$

Вправа №111. Дано дійсне число $x \neq 0$. Обчислити

$$\frac{x}{x^2 + \frac{2}{x^2 + \frac{4}{x^2 + \frac{8}{x^2 + \dots}}}}$$

$$\dots$$

$$x^2 + \frac{256}{x^2}$$

Вправа №112. Дано цілі числа n, k ($n \geq k \geq 0$). Обчислити

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

Вправа №113. Нехай n – натуральне і нехай $n!!$ Означає $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$ для непарного n і $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ для парного n .

Для заданого натурального n обчислити:

- а) $n!!$;
б) $(-1)^{n+1}n!!$.

Вправа №114. Обчислити:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}; & \text{б) } \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i^3}; \\ \text{в) } \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i!}; & \text{г) } \sum_{i=1}^{128} \frac{1}{(2i)^2}; \\ \text{д) } \prod_{i=1}^{52} \frac{i^2}{i^2 + 2i + 3} *); & \text{е) } \prod_{i=1}^{10} \left(2 + \frac{1}{i!}\right); \\ \text{ж) } \prod_{i=2}^{100} \frac{i+1}{i+2}; & \text{з) } \prod_{i=2}^{10} \left(1 - \frac{1}{i!}\right)^2. \end{array}$$

Вправа №115. Дано натуральне число n . Обчислити:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; & \text{б) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^5}; \\ \text{в) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2}; & \text{г) } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)k}; \\ \text{д) } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}; & \text{е) } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)k}; \\ \text{ж) } \sum_{k=1}^n \frac{k!}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1}}. \end{array}$$

Вправа №116. Дано натуральне число n , дійсне число x . Обчислити:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!}; & \text{б) } \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i!} + \sqrt{|x|} \right); \\ \text{в) } \sum_{i=1}^n \frac{x + \cos(ix)}{2^i}; & \text{г) } \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sin(kx)}{k!} \right); \\ \text{д) } \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} - \cos^k |x| \right); & \text{е) } \prod_{k=1}^n \frac{(1-x)^{k+1} + 1}{((k-1)!+1)^2}. \end{array}$$

*) Вираз $\prod_{i=1}^{52} \frac{i^2}{i^2 + 2i + 3} \epsilon$ короткий запис добутку $\frac{1}{1^2 + 2 \cdot 1 + 3} \cdot \frac{2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 3} + \dots + \frac{52}{52^2 + 2 \cdot 52 + 3}$; взагалі, $\prod_{i=m}^n f_i$ позначає $n \geq m$ добуток $f_m \cdot f_{m+1} \cdot \dots \cdot f_n$; при $n < m$ вираз не має змісту.

Вправа №117. Дано натуральне число n . Обчислити добуток перших n співмножників:

$$a) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots;$$

$$б) \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \dots$$

Вправа №118. Обчислити

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{9999} - \frac{1}{10000}$$
 наступними чотирма способами:

а) послідовно зліва направо;

б) послідовно зліва направо обчислюється

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9999} \text{ і } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10000}, \text{ потім друге значення віднімається з першого;}$$

в) послідовно справа наліво;

г) послідовно справа наліво обчислюються суми, виписані в б), потім віднімання.

Чому при обчисленні на обчислювальній машині кожним з цих способів одержуються різні результати?

Вправа №119. Обчислити нескінчену суму з заданою точністю ε ($\varepsilon > 0$). Вважати, що необхідна точність досягнута, якщо обчислена сума кількох перших доданків і черговий доданок виявився по модулю менші, ніж ε , - цей і всі наступні доданки можна вже не враховувати.

Обчислити:

$$a) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2};$$

$$б) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)};$$

$$в) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!};$$

$$г) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!};$$

$$д) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i(i+1)(i+2)};$$

$$е) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i + 5^{i+2}}.$$

§ 5. Найпростіші графічні побудови.

Вправа №120. Побудувати:

- а) трикутник з вершинами $(100, 100)$, $(150, 100)$, $(80, 170)$;
- б) прямокутник з вершинами $(80, 80)$, $(170, 80)$, $(170, 150)$, $(80, 150)$;
- в) п'ятикутник з вершинами $(100, 100)$, $(150, 100)$, $(170, 120)$, $(150, 140)$, $(100, 140)$, $(80, 120)$;
- г) шестикутник з вершинами $(120, 100)$, $(140, 120)$, $(140, 140)$, $(120, 160)$, $(100, 140)$, $(100, 120)$;
- д) виконати завдання а) – г), доповнивши кожне з них вимогою закрасити побудовану плоску фігуру*).

Вправа №121. Побудувати і закрасити квадрат з сторонами 30 піксел **), центр якого суміщений з центром екрана. Сторони квадрата повинні бути паралельні осям координат екрану.

Вправа №122. Побудувати і закрасити прямокутник з сторонами 30 і 50 піксел, центр якого суміщений з центром екрана. Сторони прямокутника повинні бути паралельні осям координат екрану.

Вправа №123. Побудувати і закрасити круг радіуса 40 піксел, центр якого суміщений з центром екрану.

Вправа №124. ● Стовпчикова діаграма (гістограма) являє собою набір прямокутників, основи яких рівні, а висоти пропорційні числовим величинам, взятими з деякої сукупності (Рис.6). Для більшої наочності прямокутники діаграми звичайно зафарбовують в різні кольори.

Дано сім дійсних додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_7$. Побудувати гістограму для цих значень.

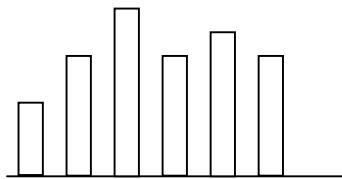


Рис.6

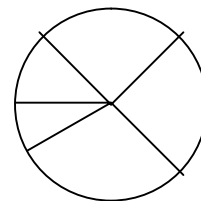


Рис.7

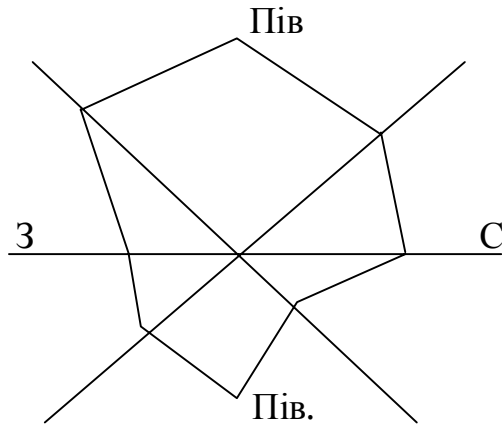
Вправа №125. ● Секторна діаграма – це круг, площі секторів якого пропорційні відповідним числовим величинам, взятих з деякої сукупності чисел (Рис.7). Для більшої наочності сектори діаграм зафарбовані в різні кольори.

Дано сім дійсних додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_7$. Побудувати секторну діаграму для цих значень.

*) Побудову і зафарбування фігур в цій і наступних вправах виконувати довільним кольором, що є на конкретній обчислювальній машині.

**) Довжини відрізків в цій і наступних вправах вказуються в кількості адресованих точок екрана (пікселів).

Вправа №126. Дано натуральні числа $v_1, v_2, \dots, v_8$, які задають число днів в році, в яких переважав відповідно північний, північно-східний, східний, південно-східний, південний, південно-західний, західний або північно-західний напрямок вітру. Побудувати розу вітрів. (Рис.8)



Мал.8

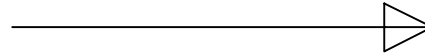


Рис.9

Вправа №127. Стрілка (Рис.9) складається з відрізка прямої і рівностороннього трикутника – вістря. Сторона трикутника, яка пересікає відрізок, утворює з ним прямий кут; точка перетину ділить відрізок у відношенні 1:15. Побудувати:

- горизонтальну стрілку, напрямлену з точки $(100, 100)$ в точку $(150, 100)$;
- горизонтальну стрілку, напрямлену з точки $(150, 100)$ в точку $(100, 100)$;
- вертикальну стрілку, напрямлену з точки $(100, 50)$ в точку $(100, 150)$;
- вертикальну стрілку, напрямлену з точки $(100, 100)$ в точку $(100, 50)$.

Вправа №128. Побудувати осі координат (Рис.10). Початок координат необхідно помістити поблизу лівого нижнього кута екрана, півосі Ox і Oy розмістити, як показана на Рис.10.

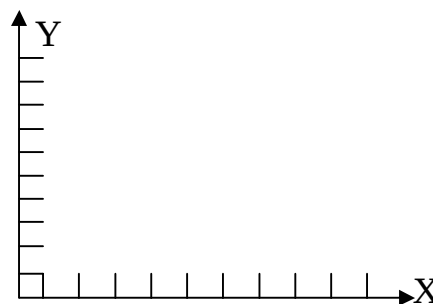


Рис.10

Вправа №129. ● Рис.11 а-о складені з найпростіших геометричних фігур: трикутників, квадратів, кіл, точок і т.д. Циплення (Рис. 11 а) складається з еліпсу (тіло циплення), кола (голова), трьох трикутників (ніс, хвіст і крило) ф двох прямих(лапи). Будинок (Рис.11 б) складається з двох квадратів (будинок і вікно), прямокутника (двері), трикутника (дах) і ламаної (труба). Вантажівка (Рис.11 в) складається з двох прямокутників (кабіна, кузов), квадрата (вікно) і двох кіл (колеса). Ялинка (Рис.11 г) складається з трьох трикутників (гілки) і прямокутника (стовбур) і т д. Одержати на екрані і розмалювати Рис 11 а-о.

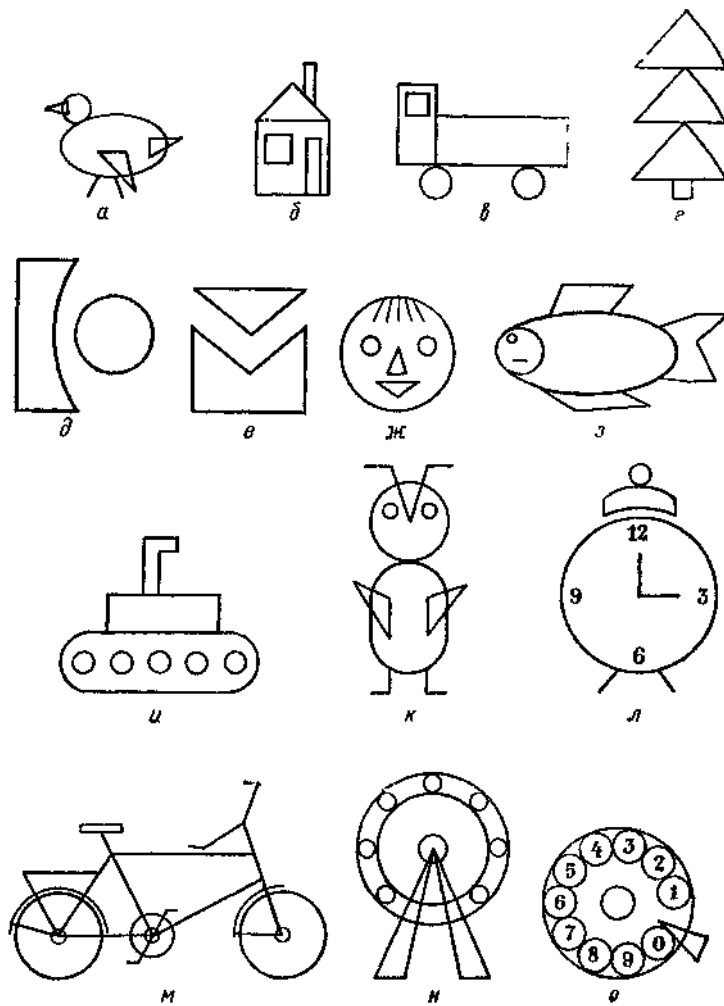


Рис. 11

Вправа №130. На Рис.12 *а - р* дано шаблони кількох фігур: жука, букета квітів, робота, літака і т.д. Замальований квадрат на шаблоні відповідає висвіченій точці, пустий квадрат – точці, яка не висвічується (або, теж саме, точці, колір якої співпадає з кольором фону). Одержати на екрані фігури по шаблонах, приведених на Рис.12 *а - р*.

Вправа №131. Скласти шаблони рукописних букв від *а* до *я*. Використовуючи ці шаблони, виконати підписи рисунків до фігур попередньої вправи і фігурам вправи 129. (шаблон рукописної букви *г* дивись на Рис.13).

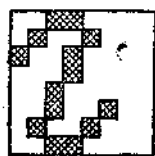


Рис. 13



Рис. 14

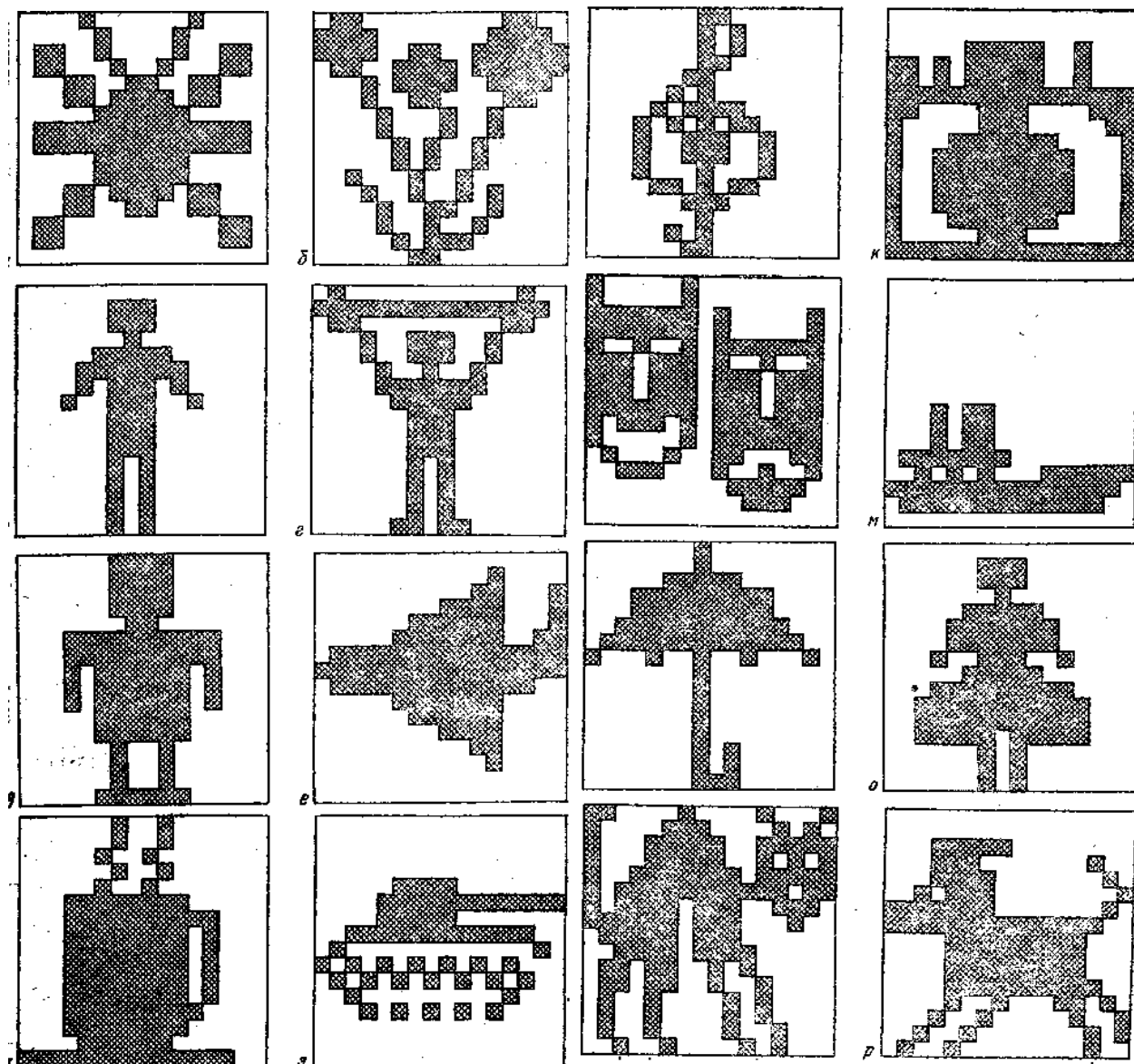


Рис.12 а - з

Рис. 12; и — р

Вправа №132. Дано натуральне число n ($n \leq 999999$). Записати його шістьма цифрами, використовуючи дев'ятисегментний шаблон (як на поштових конвертах).

Вправа №133. ● Одержати на екрані Рис.14 електричну лампочку і забезпечити можливість “запалювати” і “гасити” намальовану лампочку: включення і виключення лампочки повинно виконуватись з клавіатури, спіраль запаленої і погашеної лампочки пофарбована в різні кольори.

Вправа №134. ● Одержати на екрані Рис.15 і забезпечити можливість “запалювати” і “гасити” світло в будинку: включення і виключення світла повинно виконуватись з клавіатури, вікно будинку при запаленому і при погашеному світлі фарбується в різні кольори.

Вправа №139. Дано натуральне число n . Одержати послідовність $b_1, \dots, b_n$, де при $i=1, 2, \dots, n$ значення дорівнює:

- | | |
|--|---|
| а) i ; | б) i^2 ; |
| в) $i!$; | г) 2^{i+1} ; |
| д) $2^i + 3^{i+2}$; | е) $\frac{2^i}{i!}$; |
| ж) $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i}$; | з) $1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{i+1}}{i}$; |
| і) $i \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{i!} \right)$. | |

Вправа №140. Обчислити значення виразу $\frac{3a+4}{a^2-5a-9}$ де $a=1, 2, \dots, 100$.

Вправа №141. Циліндр об'єму одиниця має висоту h . Визначити радіус основи циліндра для значень h , рівних $0,5, 1, 1,5, \dots, 5$.

Вправа №142. Обчислити значення многочлена $x^5 + 9x^4 + 1,7x^2 - 9,6$ для $x=0, 1, \dots, 5$.

Вправа №143. Дано дійсні числа $a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, \dots, x_{50}$. Одержати $b_1, \dots, b_{50}$, де $b^i = \frac{x_i^2 - x_i - a_1}{x_i - a_1} \cdot \frac{x_i^3 - x_i - a_2}{x_i - a_2} (x_i - a_3) - \frac{x_i^4 - x_i + a_4}{x_i} + x_i(x_i + a_3), i=1, 2, \dots, 50$.

Вправа №144. ● ● ● Послідовність чисел Фібоначчі $u_0, u_1, \dots$ утворюються по закону $u_0=0, u_1=1, u_i=u_{i-1}+u_{i-2} (i=2, 3, \dots)$.

а) Дано натуральне число $n>1$. Одержати $u_0, u_1, \dots, u_n$.

б) Послідовність $f_0, f_1, \dots$ утворюється по закону $f_0=1, f_1=1, f_i=f_{i-1}+f_{i-2}+u_{i-2} (i=2, 3, \dots)$. Дано натуральне $n>1$. Одержати $f_0, f_1, \dots, f_n$.

Вправа №145. Послідовність $x_1, x_2, \dots$ утворена по закону:

- а) $x_1=0; x_2=\frac{5}{8}; x_i=\frac{x_{i-1}}{2}+\frac{3}{4}x_{i-2}, i=3, 4, \dots;$
 б) $x_1=1; x_2=0,3; x_i=(i+1)x_{i-2}, i=3, 4, \dots;$
 в) $x_1=x_2=x_3=1; x_i=(i+3)(x_{i-1}-1)+(i+4)x_{i-3}, i=4, 5, \dots$.

Одержати $x_1, x_2, \dots, x_{20}$.

Вправа №146. Дано натуральне число n , дійсні числа $a, b (a \neq b)$. Одержати $r_0, r_1, \dots, r_n, r_i=a+ih, h=(b-a)/n$.

Вправа №147. Обчислити послідовність значень функцій $p_1(x)=x, p_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}, p_3(x)=\frac{5x^2-3x}{2}$ для значень аргументу $x=0, 0,05, 0,1, \dots, 20$.

Вправа №148. ●●● Одержати таблицю температур по Цельсію від 0 до 100 градусів і їх еквівалентів по шкалі Фаренгейта, використовуючи для переводу формулу $t_F = \frac{9}{5}t_c + 32$.

Вправа №149. Обчислити значення функції $y = 4x^3 - 2x^2 + 5$ для значень x , що змінюється від -3 до 1 , з кроком $0,1$.

Вправа №150. Дано натуральне число n . Обчислити значення функції $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$ для $x = 1, 1,1, 1,2, \dots, 1+0,1n$.

Вправа №151. Дано натуральне число n , дійсні позитивні числа $C_1, \dots, C_n$. Значення $C_1, \dots, C_n$ є ємностями n конденсаторів. Визначити ємностями систем конденсаторів, які одержуються послідовним і паралельним з'єднанням даних конденсаторів.

Вправа №152. Дано натуральне число n , дійсні числа $a, h, b, d_0, \dots, d_n$. Обчислити

$$d_0 + d_1(b-a) + d_2(b-a)(b-a-h) + \dots + d_n(b-a)(b-a-h) \dots (b-a-(n-1)h).$$

Вправа №153. Дано натуральне число n , дійсні числа $x, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$. Обчислити, використовуючи схему Горнера, значення

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Вправа №154. Дано натуральне число n , дійсні числа $a, b, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Пара a, b — координати школи мікрорайону, а пари x_i, y_i ($i=1, \dots, n$) — подібно координати будинків цього мікрорайону. Знайти відстань від будинків до школи і середнє арифметичне цих відстаней.

Вправа №155. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_n$ ($n > 3$). Обчислити:

$$\left(\frac{1}{1+|x_1|} + x_2\right)\left(\frac{1}{1+|x_2|} + x_3\right) \dots \left(\frac{1}{1+|x_{n-1}|} + x_n\right).$$

Вправа №156. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_n$ ($n > 3$). Обчислити:

$$\begin{aligned} \text{а) } & (x_1 + 2x_2 + x_3)(x_2 + 2x_3 + x_4) \dots (x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n); \\ \text{б) } & (x_1 + x_2 + x_3)x_2 + (x_2 + x_3 + x_4)x_3 + \dots + (x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Вправа №157. Дано натуральне число n , дійсні числа a, b ($b > a > 0$).

Отримати послідовність дійсних чисел $y_0, y_1, \dots, y_n$, де $y_i = \sqrt{x_i}$,
 $x_i = a + ih, h = (b-a)/n$.

Вправа №158. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_{39}$. В послідовності $a_1, \dots, a_{39}$ замінити кожний із членів залишку від ділення його квадрата на n .

Вправа №159. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 3$).

Отримати $b_1, \dots, b_{n-2}$, де

$$b_i = a_{i+1} + a_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Вправа №160. Дано натуральне число n , Дійсні числа $\alpha_1, l_1, \alpha_2, l_2, \dots, \alpha_n, l_n$ ($l_1, l_2, \dots, l_n \geq 0$). Знайти координати кінця ламаної лінії, зображеної на Рис.16.

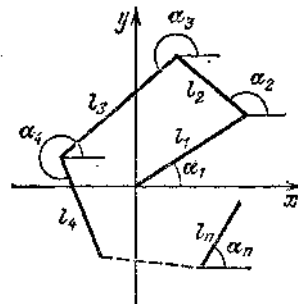


Рис. 16.

Вправа №161. Дано натуральне число n , Дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати $b_1, \dots, b_n$, де

$$b_i = \frac{a_i}{1 + (a_1 + \dots + a_i)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

Вправа №162. Дано натуральні числа i, n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$ ($i \leq n$). Знайти середнє арифметичне чисел $a_1, \dots, a_n$, крім a_i .

Вправа №163. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{37}$. Всі члени цієї послідовності, починаючи з першого позитивного, зменшити на 0,5.

Вправа №164. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{50}$. Отримати “згладжені” значення $a_1, \dots, a_{50}$, замінивши у вихідній послідовності всі члени, крім першого та останнього, по формулі

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3}, \quad i = 2, 3, \dots, 49;$$

враховується, що

а) після того як отримано нове значення деякого члена, воно використовується для обчислення нового значення наступного члена;

б) при “згладжуванні” використовуються лише старі значення членів.

Вправа №165. Дано дійсні числа $a_1, a_2, \dots$. Знаючи що $a_1 > 0$ і що серед $a_2, a_3, \dots$ є хоча б одне від’ємне число. Нехай $a_1, \dots, a_n$ — члени даної послідовності, що передують першому від’ємному члену (n раніше не відоме). Отримати:

- а) $a_1 + a_2 + \dots + a_n$;
- б) $a_1 a_2 \dots a_n$;
- в) *середнє арифметичне* $a_1, \dots, a_n$;
- г) *середнє геометричне* $a_1, \dots, a_n$;
- д) $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots, a_1 a_2 \dots a_n$;
- е) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$;
- ж) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1$;
- з) $(-1)^n a_n$;
- и) $n + a_n$;
- к) $|a_1 - a_n|$.

Вправа № 166. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Отримати числа $b_1, \dots, b_n$, які з'єднані з $a_1, \dots, a_n$ наступним чином :

$$b_1 = a_1, b_n = a_n, \quad b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{3}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Вправа №167. Нехай

$$x_1 = y_1 = 1; \quad x_2 = y_2 = 2; \quad x_i = \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{i};$$

$$y_i = \frac{x_{i-1}^2 + x_{i-2} + y_{i-1}}{i}, \quad i = 3, 4, \dots$$

Отримати :

- а) $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{25}, y_{25}$;
- б) $y_1/2, y_2/3, \dots, y_{25}/26$.

Вправа №168. Дане натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n (n \geq 6)$.
Отримати:

- а) $a_6, a_7, \dots, a_n$;
- б) $a_6, a_7, \dots, a_n, a_1$;
- в) $a_6, a_7, \dots, a_n, a_5$.

Вправа №169. Дано дійсні числа $x, y, \dots, y_{100}$
 $(y_1 < y_2 < \dots < y_{100}, y_1 < x \leq y_{100})$.
 Знайти натуральне k , при якому $y_{k-1} < x \leq y_k$.

Вправа №170. Дано натуральні числа, $n, a_1, \dots, a_n (n \geq 4)$. Числа $a_1, \dots, a_n$ – це виміряні в сотих долях секунди результати n спортсменів в бігу на 100 м. Скласти програму з чотирьох кращих бігунів для участі в естафеті 4×100 , тобто вказати одну з четвірок натуральних чисел, для якої $1 \leq i < j < k < l \leq n$ і $a_i + a_j + a_k + a_l$ має найменше значення.

Вправа № 171. Дано натуральні числа $n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}$. Кожна трійка чисел a_i, a_{i+1}, a_{i+2} , де i кратне трьом, задає координати центра квадрата (a_i, a_{i+1}) і довжину його сторони a_{i+2} . Передбачається, що сторони квадратів розміщені паралельно осям координат екрана. Побудувати і зафарбувати якими-небудь кольорами квадрати, задані послідовністю $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}$.

Вправа №172. Дано натуральні числа $n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}$. Кожна трійка чисел a_i, a_{i+1}, a_{i+2} , де i кратне трьом, задає координати центра круга (a_i, a_{i+1}) і його радіус a_{i+2} . Побудувати і закрасити якими-небудь кольорами круги, задані послідовністю $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}$.

Вправа №173. Дано натуральні числа $n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{4n-1}$. Кожні чотири числа $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}$, де i кратне чотирьом, задає прямокутник із сторонами, паралельними осям координат екрана: числа a_i, a_{i+1} — це координати центра прямокутника, a_{i+2}, a_{i+3} — довжина його сторін. Побудувати і зафарбувати якими-небудь кольорами прямокутники, задані послідовністю $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{4n-1}$.

Вправа №174. Дано натуральні числа $n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{6n-1}$. Кожні шість чисел $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}, a_{i+5}$, де i кратне шести, задає координати вершин трикутника: числа a_i, a_{i+1} — це координати першої вершини, a_{i+2}, a_{i+3} — координати другої вершини, a_{i+4}, a_{i+5} — координати третьої вершини. Побудувати трикутники, задані послідовністю $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{6n-1}$.

Вправа №175. Дані натуральні числа $n, a_0, a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$. Кожна пара чисел a_i, a_{i+1} , де i кратне двом, задає координати вершин ламаної.

а) Побудувати ламану, задану послідовністю $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$.

б) Побудувати ламану, задану послідовністю $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$; останню вершину сполучити з першою.

Вправа №176. Дано натуральні числа $n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}$. Кожна трійка чисел a_i, a_{i+1}, a_{i+2} , де i кратне трьом, задає координати точки і її колір. Побудувати всі точки, задані послідовністю $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3n-1}$.

Вправа №177. Дано натуральні числа $n, x, y, r_1, c_1, r_2, c_2, \dots, r_n, c_n$. Побудувати n концентричних окружностей зі спільним центром в точці (x, y) , маючи радіуси $r_1, \dots, r_n$ і закрашені у кольори $c_1, c_2, \dots, c_n$.

§ 7. Об'єднання циклу і розгалуження.

Вправа №178. ● ● ● Дано натуральні числа $n, a_1, \dots, a_n$. Визначити кількість членів a_k послідовності $a_1, \dots, a_n$;

- а) що є непарними числами;
- б) кратні 3 і не кратні 5;
- в) що є квадратами парних чисел;
- г) задовольняють умову $a_k < \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$;
- д) задовольняють умову $2^k < a_k < k!$;
- е) які мають парні порядкові номери і є непарними числами.

Вправа №179. ● ● ● Дано натуральні числа $n, q_1, \dots, q_n$. Знайти ті члени q_i послідовності $q_1, \dots, q_n$, які

- а) є подвоєними непарними числами;
- б) при діленні на 7 дають залишок 1, 2 або 5;
- в) мають такі якості, що корні рівняння $x^2 + 3q_i - 5$ дійсні і додатні.

Вправа №180. Дано натуральне число n . Одержати суму тих чисел виду $i^2 - 3in^2 + n$ ($i=1, 2, \dots, n$), які є потроєними непарними *).

Вправа №181. ● ● ● Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{50}$. Одержати суму тих чисел даної послідовності, які

- а) кратні 5;
- б) непарні і від'ємні;
- в) задовольняють умову $|a_i| < i^2$.

Вправа №182. ● ● ● Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Знайти кількість і суму тих членів даної послідовності, які діляться на 5 і не діляться на 7.

Вправа №183. ● ● ● Дано натуральні числа n, p , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати добуток членів послідовності $a_1, \dots, a_n$ кратних p .

Вправа №184. ● ● ● Дано цілі числа $p, q, a_1, \dots, a_{67}$ ($p > q \geq 0$). В послідовності $a_1, \dots, a_{67}$ замінити нулями члени, модуль яких, при діленні на p дає в залишку q .

Вправа №185. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати подвоєну суму всіх додатних членів послідовності $a_1, \dots, a_n$.

*) В ряді вправ цього і наступних параграфів необхідно обчислити суму чи добуток тих членів послідовності, які мають певні властивості. Можна домовитись, що при відсутності таких членів шукана сума рівна нулю, а добуток – одиниці. Можна ускладнити умову задачі, прийнявши домовленість, що в подібних випадках повинно видаватись повідомлення про відсутність відповідних членів.

Вправа №186. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Обчислити обернену величину добутку членів a_i послідовності $a_1, \dots, a_n$, для яких виконується умова $i + 1 < a_i < i!$.

Вправа №187. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. В послідовності $a_1, \dots, a_n$ всі від'ємні числа збільшити на $0,5$, а всі невід'ємні замінити на $0,1$.

Вправа №188. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_n$. В послідовності $x_1, \dots, x_n$ всі члени менші двох, замінити нулями. Крім того, одержати суму членів, які належать відрізку $[3, 7]$, а також число таких членів.

Вправа №189. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. В послідовності $a_1, \dots, a_n$ всі невід'ємні члени, які не належать відрізку $[1, 2]$, замінити на 1 . Крім того, одержати число від'ємних членів і число членів, які належать відрізку $[1, 2]$.

Вправа №190. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати суму додатних і число від'ємних членів послідовності $a_1, \dots, a_n$.

Вправа №191. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Замінити всі більші семи члени послідовності $a_1, \dots, a_n$ числом 7 . Обчислити кількість таких членів.

Вправа №192. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{45}$. Одержати число від'ємних членів послідовності $a_1, \dots, a_{35}$ і число нульових членів всієї послідовності $a_1, \dots, a_{45}$.

Вправа №193. Нехай $x_0 = a$; $x_k = qx_{k-1} + b$ ($k = 1, 2, \dots$). Дано невід'ємне ціле n , дійсні a, b, c, d, q ($c < d$). Чи належить x_n інтервалу (c, d) ?

Вправа №194. Дано натуральне число n , цілі числа $a, x_1, \dots, x_n$. Якщо в послідовності $x_1, \dots, x_n$ хоча б один член, рівний a , то одержати суму всіх членів, які слідує за першим таким членом; в інших випадках відповіддю повинно бути число -10 .

Вправа №195. Дано натуральне число n , дійсні числа $a, b, c_1, \dots, c_n$. Чи вірно, що при $1 \leq k \leq n-1$ кожного разу, коли $c_k < a$, виконано $c_{k+1} > b$?

Вправа №196. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{50}$. Одержати послідовність $b_1, \dots, b_{50}$, яка відрізняється від даної тим, що всі непарні члени подвоєні.

*) В якості відповіді до цієї і ряду інших вправ, в яких вимагається визначити дійсність якого-небудь твердження, повинні бути отримані відповідні текстові повідомлення.

Вправа №197. Обчислити $\sum_{i=1}^{30} (a_i - b_i)^2$, де

$$a_i = \begin{cases} i, & \text{якщо } i - \text{непарне,} \\ \frac{i}{2} & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} i^2, & \text{якщо } i - \text{непарне,} \\ i^3 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Вправа №198. Дано натуральні числа $n, b_0, \dots, b_n$.

Обчислити $f(b_0) + f(b_1) + \dots + f(b_n)$, де

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \text{ кратне } 3, \\ x, & \text{якщо при діленні на } 3 \text{ дає залишок } 1, \\ \lfloor \frac{x}{3} \rfloor & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Вправа №199. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 2$). Скільки серед точок $(a_1, a_n), (a_2, a_{n-1}), \dots, (a_n, a_1)$ таких, які належать колу радіуса r з центром в початку координат.

Вправа №200. Дано цілі числа $a, n, x_1, \dots, x_n$ ($n > 0$). Визначити, який номер в послідовності $x_1, \dots, x_n$ член, який рівний a . Якщо такого члену немає, то відповіддю повинно бути число 0.

Вправа №201. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати:

- а) $\max(a_1, \dots, a_n)$;
- б) $\min(a_1, \dots, a_n)$;
- в) $\max(a_2, a_4, \dots)$;
- г) $\min(a_1, a_3, \dots)$;
- д) $\min(a_2, a_4, \dots) + \max(a_1, a_3, \dots)$;
- е) $\max(|a_1|, \dots, |a_n|)$;
- ж) $\max(-a_1, a_2, -a_3, \dots, (-1)^n a_n)$;
- з) $(\min(a_1, \dots, a_n))^2 - \min(a_1^2, \dots, a_n^2)$

Вправа №202. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$.

- а) Чи вірно, що від'ємних чисел в послідовності $a_1, \dots, a_n$ більше, ніж додатних?
- б) Чи вірно, що найбільший член послідовності $a_1, \dots, a_n$ по модулю більше одиниці?

Вправа №203. Біля прилавка в магазині вистроїлась черга з n покупців. Час обслуговування продавцем i -го покупця дорівнює t_i ($i = 1, \dots, n$). Нехай дано натуральне n і дійсні $t_1, \dots, t_n$. Одержати $c_1, \dots, c_n$ де c_i – час перебування i -го покупця в черзі ($i = 1, \dots, n$). Вказати номер покупця, для обслуговування якого продавцем було затрачено найменший час.

Вправа №204. ● ● ● В деяких видах спортивних змагань виступ кожного спортсмена незалежно оцінюється кількома судьями, потім із всієї сукупності оцінок вилучається найвища і найнижча, а для оцінок, що залишилися, вираховується середньоарифметичне, яке і йде в залік спортсмену. Якщо найбільш високу оцінку виставило кілька суддів, то з сукупності оцінок вилучається тільки одна така оцінка; аналогічно поступають з найбільш низькими оцінками. Дано натуральне число n , дійсні додатні числа $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 3$). Вважаючи, що числа $a_1, \dots, a_n$ – це оцінки виставлені судьями одному з учасників змагань, визначити оцінку, яка піде в залік цьому спортсмену.

Вправа №205. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати $\max(|a_1|, \dots, |a_n|)$ і $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

Вправа №206. Дано натуральне число n . Знайти найбільше серед чисел $ke^{\sin^2(k+1)}$ ($k=1, \dots, n$), а також суму всі цих чисел.

Вправа №207. ● Дано натуральне число n . Вибрати із запису числа n цифри 0 і 5, залишивши попередній порядок решти цифр. Наприклад, з числа 590159 повинно одержатись 919.

Вправа №208. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Знайти:

- а) найменше з парних чисел, що входять в послідовність $a_1-1, a_1, a_2, \dots, a_n$;
- б) найбільше з непарних і кількість парних чисел, що входять в послідовність $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$.

Вправа №209. Дано натуральне число n , дійсне число x . Серед чисел $e^{\cos(x^{2k})} \sin(x^{3k})$ ($k=1, \dots, n$) знайти найближче до якого-небудь цілого.

Вправа №210. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати всі натуральні j ($2 \leq j \leq n-1$), для яких $a_{j-1} < a_j > a_{j+1}$.

Вправа №211. Нехай $x_1=0.3$; $x_2=-0.3$; $x_i=i+\sin(x_{i-2})$, $i=3, 4, \dots$
Серед $x_1, \dots, x_{100}$ знайти найближче до якого-небудь цілого.

Вправа №212. Нехай

$$x_1=y_1=1; \quad x_i = x_{i-1} + \frac{y_{i-1}}{i^2};$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{x_{i-1}}{i} \quad i=1, 2, \dots$$

Одержати x_8, y_{18} .

Вправа №213. Нехай

$$a_i = \frac{i-1}{i+1} + \sin \frac{(i-1)^3}{i+1}, \quad i=1,2, \dots$$

Дано натуральне число n , серед $a_1, \dots, a_n$ знайти всі додатні числа, серед додатних $a_1, \dots, a_n$ вибрати найменше число.

Вправа №214. Нехай

$$a_0 = \cos^2 1; \quad a_1 = -\sin^2 1$$

$$a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}, \quad k=2, 3, \dots$$

Знайти суму квадратів тих чисел $a_1, \dots, a_n$, які не перевершують двох.

Вправа №215. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. В послідовності $a_1, \dots, a_n$ визначити число сусідств:

- а) двох позитивних чисел;
- б) двох чисел різного знаку;
- в) двох чисел одного знаку, причому модуль першого числа повинен бути більше модуля другого числа.

Вправа №216.    Дані цілі числа $c_1, \dots, c_{95}$. Чи є в послідовності $c_1, \dots, c_{95}$:

- а) два нульових члени, що йдуть поряд;
- б) три нульових члени, що йдуть поряд?

Вправа №217. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_{3n}$. Послідовність чисел $x_1, \dots, x_{3n}$ визначає на площині n квадратів з сторонами, паралельними координатним осям: так x_1, x_2 – координати центра першого квадрата, x_3 – довжина його сторони; аналогічно, числа x_4, x_5, x_6 визначають другий квадрат, x_7, x_8, x_9 – третій і т.д. Чи є точки, які належать всім квадратам? Якщо так, то вказати координати однієї з них.

Вправа №218.    Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_{3n}$. Обчислити суму з $x_{n+1}, \dots, x_{3n}$, які перевершують по величині всі числа $x_1, \dots, x_n$.

Вправа №219. Дані дійсні числа a, b ($a < b$), натуральне число n , функція $y=f(x)$, визначена на відрізку $[a, b]$. Для значень аргументу $x_i = a + ih$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) $h=(b-a)/n$, обчислити значення функції $y_i = f(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$).

Вивести x_i і y_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) у вигляді таблиці з двох колонок. В i – рядок таблиці заносяться відповідні значення x_i і y_i . Розглянути слідуючи функції:

- а) $y = \sin x + \cos 2x$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $n=50$;
- б) $y = \sin \sqrt{2} x + \cos x$, $a=0$, $b=2\pi$, $n=50$;
- в) $y = \sqrt{x^2 + 2}$, $a=0$, $b=5$, $n=40$;
- г) $y = xe^{-x}$, $a=-1$, $b=3$, $n=40$.

Вправа №220. Розглядається послідовність $a_1, \dots, a_{1000}$. Необхідно визначити, скільки членів послідовності з номерами 1, 2, 4, 8, 16, ... мають значення, менші ніж 0.25. при цьому вважати, що

а) $a_k = \sin^2(3k-5) - \cos(k^2 - 15)$, $k=1, 2, \dots, 1000$;

б) $a_1, \dots, a_{1000}$ – задані дійсними числами;

в) $a_1 = 0.01$; $a_k = \sin(k + a_{k-1})$, $k=2, \dots, 1000$.

Вправа №221. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_n$. Одержати $(1+r)/(1+s)$, де r – сума всіх тих членів послідовності $x_1, \dots, x_n$, які не перевершують 1, а s – сума членів, більших 1.

Вправа №222. Дано натуральне число n , дійсні числа $y_1, \dots, y_n$. Знайти:

а) $\max(|z_1|, \dots, |z_n|)$, де $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| \leq 2, \\ 0.5 & \text{в інших випадках} \end{cases}$

б) $\min(|z_1|, \dots, |z_n|)$, де $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| > 1, \\ 2 & \text{в інших випадках} \end{cases}$

в) $z_1 + \dots + z_n$ де $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } 0 < y_i < 10, \\ 1 & \text{в інших випадках} \end{cases}$

г) $(\sqrt{z_1} - z_1)^2 + \dots + (\sqrt{z_n} - z_n)^2$ де $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } 0 < y_i \leq 15, \\ 2.7 & \text{в інших випадках} \end{cases}$

д) $z_1^2 + \dots + z_n^2$ де $z_i = \begin{cases} y_i & \text{при } |y_i| \leq 2, \\ 0.5 & \text{в інших випадках} \end{cases}$

Вправа №223. Дано цілі числа $a_1, a_2, \dots$. Відомо, що $a_1 > 0$ і що серед $a_2, a_3, \dots$ є хоча б одне від'ємне число. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – члени даної послідовності, які передують першому від'ємному члену (n заздалегідь відомо). Одержати:

а) $\max(a_1^2, \dots, a_n^2)$;

б) $\max(a_1^3, \dots, a_n^3)$;

в) $\min(a_1, 2a_2, \dots, na_n)$;

г) $\min(a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n)$;

д) $\max(a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 a_2 \dots a_n)$;

е) кількість парних серед $(a_1, \dots, a_n)$;

ж) кількість подвоєних непарних серед $(a_1, \dots, a_n)$;

з) кількість повних квадратів серед $(a_1, \dots, a_n)$;

і) кількість квадратів непарних чисел серед $(a_1, \dots, a_n)$.

Вправа №224.    Дано натуральне число n . Одержати всі його натуральні дільники.

Вправа №225. Дано натуральне число n . Одержати всі такі натуральні q , що n ділиться на q^2 і не ділиться на q^3 .

Вправа №226. Дано натуральні числа m, n . Одержати всі їхні натуральні спільні кратні, які менші $m \circ n$.

Вправа №227. Дано натуральні числа m і n ($m \neq 0, n \neq 0$). Одержати всі їхні спільні дільники (додатні і від'ємні).

Вправа №228. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Встановити, чи є послідовність $a_1, \dots, a_n$ впорядкована по спаданню.

Вправа №229. Дано дійсні числа x, y ($x > 0, y > 1$). Одержати ціле число k (додане, від'ємне або рівне нулю), що задовольняє умову $y^{k-1} \leq x < y^k$.

Вправа №230. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Знайти довжину найменшого відрізка числової осі, який містить числа $a_1, \dots, a_n$.

Вправа №231. Дано дійсні числа $x, y_1, \dots, y_{12}$. Встановити, по-перше, чи вірно, що $y_1 \leq x \leq y_{12}$, і, по-друге, чи вірно, що $t_1 \leq x \leq t_2$, де t_1 – найменше, а t_2 – найбільше серед $y_1, \dots, y_{12}$. (Які комбінації відповіді на перше і друге запитання можливі?)

Вправа №232. Дано натуральне число n , дійсні числа $a, x_1, \dots, x_n$ ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$). Одержати послідовність $y_1, \dots, y_{n+1}$, членами якої є члени послідовності $x_1, \dots, x_n$ і значення a , таку, що $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n+1}$.

Вправа №233. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Залишити без зміни послідовність $a_1, \dots, a_n$, якщо її члени впорядковані по не спаданню або по не зростанню. В інших випадках одержати підпослідовність $a_1, \dots, a_m$ ($m < n$), де m таке, що або $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$ і $a_m > a_{m+1}$, або $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ і $a_m < a_{m+1}$.

Вправа №234. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_n$. Одержати в порядку запису всі x_k , що задовольняють нерівність $x_k > x_1, x_k > x_2, \dots, x_k > x_{k-1}$.

Вправа №235. Дано натуральне число n , дійсне число x . Одержати

$$\frac{m! + n!}{(m + n)!}.$$

Вправа №236. Дано натуральні числа m і n . Одержати

$$\sum_{s=0}^{10} \frac{1}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}.$$

Вправа №237. Дано натуральне число n , дійсне число r . Обчислити

$$\frac{(2r)^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{[n/2]} \quad (\text{див. вправу 113}).$$

Вправа №238. Дано натуральне число n . Обчислити добуток перших n співмножників $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots$

Вправа №239. Дано натуральне число n . Обчислити

$$\frac{(-1)^{[lg 1]}}{1} + \frac{(-1)^{[lg 2]}}{2} + \dots + \frac{(-1)^{[lg n]}}{n}$$

Вправа №240. Для довільного цілого позначимо кількість цифр в його десятковому запису через $\Pi(k)$.

а) Дано натуральне число n . Обчислити

$$\frac{\Pi(1)}{1^2} + \frac{\Pi(2)}{2^2} + \dots + \frac{\Pi(n)}{n^2}.$$

б) Дано натуральне число n , дійсне число x . Обчислити

$$\frac{10^{\Pi(1)}}{1}(1-x) + \frac{10^{\Pi(2)}}{2}(1-x)^2 + \dots + \frac{10^{\Pi(n)}}{n}x^n.$$

Вправа №241. Дано натуральне число n , дійсне число x . Обчислити

$$\frac{(-1)^{[\sqrt{1}]}}{1}x + \frac{(-1)^{[\sqrt{2}]}}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n.$$

Вправа №242. Дано натуральне число n . Обчислити

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{k!}.$$

Вправа №243. ● Дано натуральне число n . Чи можна представити у вигляді суми двох квадратів натуральних чисел? Якщо можна, то

а) вказати пару x, y таких натуральних чисел, що $n = x^2 + y^2, x \geq y$.

б) вказати всі пари x, y таких натуральних чисел, що $n = x^2 + y^2, x \geq y$.

Вправа №244. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$.

а) Встановити, яке число зустрічається в послідовності $a_1, \dots, a_n$ раніше – додатне чи від'ємне. Якщо всі члени послідовності дорівнюють нулю, то повідомити про це.

б) Знайти номер першого парного члена послідовності $a_1, \dots, a_n$; якщо парних членів не має, то відповіддю повинно бути число 0.

в) Знайти номер останнього непарного члена послідовності $a_1, \dots, a_n$; якщо непарних членів не має, то відповіддю повинно бути число $n+1$.

Вправа №245. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_{30}, b_1, \dots, b_{40}, c_1, \dots, c_n$. Чи вірно, що від'ємний член в послідовності $c_1, \dots, c_n$ ніж в послідовності $a_1, \dots, a_{30}$ і $b_1, \dots, b_{40}$? Передбачається, що кожна з послідовностей містить хоча б один від'ємний член.

Вправа №246. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Встановити, чи утворюють зростаючу послідовність числа:

- а) $a_1, \dots, a_n, 2a_1, 3a_2, \dots, (n+1)a_n$;
- б) $a_1, \dots, a_n, a_n+1, a_{n-1}+2, \dots, a_1+n$;
- в) $a_1, \dots, a_n, n(a_{n-1}+1), (n-1)(a_{n-2}+2), \dots, 2(a_1+n-1)$.

Вправа №247. Дано натуральні числа $n, x_0, y_0, r, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Побудувати на екрані точки з координатами x_i, y_i :

- а) що належать кругу з центром з координатами (x_0, y_0) і радіусом r ;
- б) що не належать кругу з центром з координатами (x_0, y_0) і радіусом r .

Вправа №248. Дано натуральні числа $n, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Побудувати на екрані точки з координатами x_i, y_i :

- а) розміщені в верхній половині екрану;
- б) розміщені в нижній половині екрану.

Вправа №249. Дано натуральні числа $n, x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \dots, x_n, y_n, r_n$. Побудувати на екрані кола з центрами в точках (x_i, y_i) і радіусами r_i , для яких виконана умова $r_i > 5$.

Вправа №250. Дано натуральні числа $n, x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \dots, x_n, y_n, r_n$. Побудувати на екрані кола з центрами в точках (x_i, y_i) і радіусами r_i , якщо $r_i > 5$, і радіусами $2r_i$ в інших випадках.

§ 8. Обробка послідовностей символів.

Якщо у використовуваній мові мається можливість роботи з рядками, то поряд з приведеними в параграфі вправами має зміст розглянути аналогічні задачі, сформульовані термінами рядків. В умові задачі 251 вписаний додатковий рядковий варіант, але надалі цього вже не робиться, так як самостійне формулювання таких варіантів не складно для того, хто розв'язує вправу. В кожному такому варіанті число символів в рядку не вноситься у дані задачі, але передбачається, що воно не перевершує максимальної допустимої довжини рядка у використовуваній мові програмування.

Вправа №251. ● Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Підрахувати, скільки разів серед даних символів зустрічається літера x . (Рядковий варіант: даний рядок символів; підрахувати, скільки разів серед символів зустрічається літера x .)

Вправа №252 ● Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Підрахувати:

- а) скільки разів серед даних символів зустрічається символ $+$ і скільки разів символ $*$;
- б) загальне число входжень символів $+$, $-$, $*$, в послідовності $s_1, \dots, s_n$.

Вправа №253. ● Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Перетворити послідовність $s_1, \dots, s_n$, замінивши в ній:

- а) всі знаки оклику крапками;
- б) кожную крапку трьома крапками;
- в) кожную з груп, які знаходяться поряд крапок одною крапкою;
- г) кожную з груп крапок, які знаходяться поряд, трьома крапками.

Вправа №254. ● Дано натуральне число n , символи $S_1, \dots, S_n$. Встановити, чи має послідовність $S_1, \dots, S_n$ такі члени послідовності S_i, S_{i+1} , що S_i – це кома, а S_{i+1} – тире.

Вправа №255. ● Дано натуральне число n , символи $S_1, \dots, S_n$. Одержати перше натуральне i , для якого кожен із символів S_i і S_{i+1} співпадає з буквою a . Якщо такої пари символів в послідовності $S_1, \dots, S_n$ не має, то відповіддю повинно бути число 0.

Вправа №256. ● Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Відомо, що серед $s_1, \dots, s_n$ є в крайньому разі одна кома. Знайти, таке натуральне i , що

- а) s_i – перша по черзі кома;
- б) s_i – остання по черзі кома.

Вправа №257. ● Дано символи $s_1, s_2, \dots$. Відомо, що символ s_1 відмінний від знаку оклику і що серед $s_2, s_3, \dots$ є в крайньому разі один знак оклику. Нехай $s_1, \dots, s_n$ – символи даної послідовності, що передують першому знаку оклику (n наперед невідомо).

- а) Визначити кількість пропусків серед $s_1, \dots, s_n$.
- б) Вияснити, чи входить в послідовність $s_1, \dots, s_n$ літера y .
- в) Вияснити, чи правильно, що серед $s_1, \dots, s_n$ є всі літери, які входять в слово *шина*.
- г) Вияснити, чи є серед $s_1, \dots, s_n$ пара сусідніх літер *но* чи *он*.

- д) Вияснити, чи є серед $s_1, \dots, s_n$ пара сусідніх однакових символів.
 е) Вияснити, чи правильно, що існують такі натуральні i та j , що $1 < i < j < n$ і що s_i співпадає з s_{i+1} , а $s_j - 3 s_{j+1}$.

Вправа №258. ● Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Видалити з даної послідовності всі групи літер виду $abcd$.

Вправа №259. ● Дані натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Перетворити послідовність $s_1, \dots, s_n$, видаливши кожен символ $*$ і повторити кожен символ, відмінний від $*$.

Вправа №260. ● Дано натуральне число n і символи $s_1, \dots, s_n$, серед яких є двокрапка.

- Одержати всі символи, розміщені до першої двокрапки включно.
- Одержати всі символи, розміщені після першої двокрапки.
- Одержати всі символи, розміщених між першою і другою двокрапками. Якщо другої двокрапки немає, то одержати всі символи, розміщені після єдиної двокрапки.

Вправа №261. ● Дано натуральне число n , $s_1, \dots, s_n$.

- Підрахувати найбільшу кількість, що йдуть підряд проміжків.
- Вияснити чи правильно, що в послідовності $s_1, \dots, s_n$, є п'ять підряд букв e .

Вправа №262. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$. Визначити число входжень в послідовність $s_1 \dots s_n$ групи літер:

- abc
- aba

Вправа №263. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$. Замінити в послідовності $s_1 \dots s_n$ кожен групу літер $child$ групою літер $children$.

Вправа №264. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$. Виключити з послідовності $s_1 \dots s_n$ групи символів, які знаходяться між дужками $(,)$. Самі дужки також повинні бути виключені. Припускається, що всередині кожної пари дужок немає інших дужок.

Вправа №265. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$. Перетворити послідовність $s_1 \dots s_n$: якщо немає символу $*$, то залишити її без змін, в іншому випадку замінити кожний символ, який зустрічається після першого входження символу $*$, на символ $-$.

Вправа №266. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$, серед яких є хоча б одна крапка. Перетворити послідовність $s_1 \dots s_n$ вилучивши з неї всі крапки, попередні першій крапці, і замінити знаком $+$ всі цифри 3, що зустрічаються після першої крапки.

Вправа №267. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$ ($n > 1$). Перетворити послідовність, замінивши комами всі двокрапки, що зустрічаються серед $s_1, \dots, s_{[n/2]}$, і замінити крапками всі символи знаки оклику, які зустрічаються серед $s_1, \dots, s_{[n/2]+1}, \dots, s_n$.

Вправа №268. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$. Відомо, що серед даних символів є хоча б один, відмінний від проміжку. Необхідно перетворити послідовність $s_1 \dots s_n$ так. Видалити групи проміжків, якими починається і якими закінчується послідовність, а також змінити кожну внутрішню групу проміжків одним проміжком. Якщо вказаних груп немає в даній послідовності, то залишити послідовність без змін.

Вправа №269. ● Дано натуральне число n , символи $s_1 \dots s_n$. Групи символів, розділені проміжками (одним або кількома) і які не мають проміжків всередині себе, будемо називати словами.

- а) Підрахувати кількість слів в даній послідовності.
- б) Підрахувати кількість букв a в останньому слові даної послідовності.
- в) Знайти кількість слів, які починаються з букви b .
- г) Знайти кількість слів, у яких перший і останній символи співпадають між собою.
- д) Знайти будь-яке слово, яке починається з букви a .
- е) Перетворити дану послідовність, замінюючи всяке входження слова *це* на *те*.
- ж) Знайти довжину самого короткого слова.

Вправа №270. ● Дані символи $S_1, S_2, \dots$ відомо, що символ S_1 відмінний від проміжку і що серед $S_2, S_3, \dots$, що має хоча б один проміжок. Розглядаються $S_1, \dots, S_n$ – символи, що передують першому проміжку (n заздалегідь не відоме). Перетворити послідовність $S_1, \dots, S_n$:

- а) видаливши з неї всі символи, що не є буквами;
- б) замінив всі малі букви однойменними великими;
- в) вилучивши всі символи, що не є буквами або цифрами і замінивши кожну велику букву однойменною малою;
- г) вилучивши з кожної групи цифр, йдуть підряд, в якій більше двох цифр і якій передують крапка, всі цифри, починаючи з третьої наприклад, $ab+0.1973 - 1.1$ перетворюється в $ab+0.19 - 1.1$;
- д) вилучивши з кожної групи цифр, яким не передують крапка, всі початкові нулі (крім останнього, якщо за ним йде крапка).

§ 9. Обчислення з зберіганням послідовності значень

Вправа №271. Дані дійсні числа $a_1, \dots, a_{15}$. Знайти

$$A = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} a_i, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (a_i - \tilde{a})^2}{14}}.$$

Вправа №272. Дано дійсні числа $a_{1901}, a_{1902}, \dots, a_{1950}$ — кількість опадів (в міліметрах), які випали у Києві на протязі перших 50 років позаминулого століття. Потрібно вичислити середню кількість опадів і відхилень від середнього кожного року.

Вправа №273. Система із 25 матеріальних точок в просторі задана з допомогою дійсних чисел $x_1, y_1, z_1, p_1, x_2, y_2, z_2, p_2, \dots, x_{25}, y_{25}, z_{25}, p_{25}$, де x_i, y_i, z_i — координати i -ї точки, а p_i — її маса ($i = 1, 2, \dots, 25$). Знайти координати центру тяжіння системи, а також відстань від центра тяжіння до всіх точок системи.

Вправа №274. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{20}$. Знайти числа $b_1, \dots, b_{20}$, де b_i — середнє арифметичне всіх членів послідовності $a_1, \dots, a_{20}$, крім a_i ($i = 1, 2, \dots, 20$).

Вправа №275. Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_{10}, y_1, \dots, y_{10}$. Знайти $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$. Як скоротити рішення, якщо вихідні дані будуть мати наступний порядок: $x_1, y_1, \dots, x_{10}, y_{10}$?

Вправа №276. Побудувати послідовність цілих чисел $a_1, \dots, a_{30}$, де $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_i = a[i/2] + a_{i-2}$ ($i = 3, \dots, 30$).

Вправа №277. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Знайти a_n, a_{n-1}, a_1^* .

Вправа №278. Дано натуральні числа $n_1, \dots, n_{20}$, дійсні числа $x_1, \dots, x_{20}$.

Знайти $\frac{n_1 x_1 + \dots + n_{20} x_{20}}{n_1 + \dots + n_{20}}$.

Вправа №279. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Знайти $(a_1 + b_n)(a_2 + b_{n-1}) \dots (a_n + b_1)$.

Вправа №280. Нехай x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots$) знайдені, як у вправі 167. Знайти $x_1, \dots, x_{25}, y_1, \dots, y_{25}$.

*) Кожного разу, коли число членів в даній послідовності залежить від деяких величин $n, m, \dots$, не віднесених явно до даних вправи, то маєтись на увазі, що при роботі з мовами, в яких не передбачені масиви з динамічними границями (такою мовою є наприклад паскаль) ці величини або визначаються в програмі як константи (наприклад, в програмі на паскалі даються визначення `const n=...; const m=...` з конкретними числами замість трикрапок), або ще до складання програми ці величини замінюються конкретними числами. Якщо мова дозволяє після введення значення змінних $n, m, \dots$ розглядати масив, межі якого залежать від $n, m, \dots$, необхідно скористатись цією можливістю і вважати значення $n, m, \dots$ даними числами.

Вправа №281. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{28}, b_1, \dots, b_{28}$. Члени послідовності $c_1, \dots, c_{29}$ зв'язані з членами даних послідовностей рівністю $c_{29} = 0$,

$$c_{29-i} = \frac{a_{29-i}}{b_{29-i} - c_{29-i+1}} \quad (i = 1, \dots, 28). \text{ Знайти } c_1, \dots, c_{29}.$$

Вправа №282. ● ● ● Дано дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$. Одержати:

- а) $a_1, a_{n+1}, a_2, a_{n+2}, \dots, a_n, a_{2n}$;
- б) $a_1, a_{2n}, a_2, a_{2n-1}, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$;
- в) $a_1 + a_{2n}, a_2 + a_{2n-1}, \dots, a_n + a_{n+1}$.

Вправа №283. ● ● ● Дано дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_{17}$. Одержати:

- а) $a_{17}, a_1, a_2, \dots, a_{16}$;
- б) $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{17}, a_1, a_2, \dots, a_{10}$;
- в) $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{17}, a_{10}, a_9, \dots, a_1$.

Вправа №284. ● ● ● Дано дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_{20}$. Одержати:

- а) $a_{20}, a_{11}, a_{19}, a_{10}, \dots, a_{10}, a_1$;
- б) $a_1, a_3, \dots, a_{19}, a_2, a_4, \dots, a_{20}$;
- в) $a_1, a_{11}, a_3, a_{13}, \dots, a_9, a_{19}$;
- г) $a_{12}, a_2, a_{14}, a_4, \dots, a_{20}, a_{10}$;
- д) $a_1, a_{11}, a_{12}, a_2, a_3, a_{13}, a_{14}, a_4, \dots, a_9, a_{19}, a_{20}, a_{10}$.

Вправа №285. Дано дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Якщо в результаті заміни від'ємних членів послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n$ їх квадратами члени будуть утворювати не спадаючу послідовність, то одержати суму членів даної послідовності; в іншому випадку одержати їх добуток.

Вправа №286. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{99}$. Одержати нову послідовність, викинувши з даної всі члени з значенням $\max(a_1, \dots, a_{99})$.

Вправа №287. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Всі члени послідовності з парними номерами, що передують першому по порядку члену з значенням $\max(a_1, \dots, a_n)$, помножити на $\max(a_1, \dots, a_n)$.

Вправа №288. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$, кожне з яких відмінне від нуля. Якщо в послідовності додатні і від'ємні числа чергуються (+, −, +, −, ... або −, +, −, +, ...), то відповіддю повинна бути сама дана послідовність. Інакше одержати всі від'ємні члени послідовності, зберігши порядок їх слідування.

Вправа №289. Дано натуральне число m , дійсні числа $a_1, \dots, a_{30}$ (числа $a_1, \dots, a_{30}$ попарно різні, $m \leq 30$). В послідовності $a_1, \dots, a_{30}$ поміняти місцями найбільший член і член з номером m .

Вправа №290. Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_{101}, y_1, \dots, y_{101}$. Одержати дійсні $x'_1, \dots, x'_{101}, y'_1, \dots, y'_{101}$, перетворити для одержання x'_i, y'_i члени x_i, y_i по правилу: якщо вони обидва від'ємні, то кожен з них збільшити на 0,5; якщо від'ємне тільки одне число, то від'ємне число замінити його квадратом; якщо обидва числа невід'ємні, то кожне з них замінити на середнє арифметичне даних значень.

Вправа №291. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{30}$. Одержати:

- а) $\max(a_1 + a_{30}, a_2 + a_{29}, \dots, a_{15} + a_{16})$;
- б) $\min(a_1 a_{16}, a_2 a_{17}, \dots, a_{15} a_{30})$.

Вправа №292. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Перетворити цю послідовність по правилу: більше з a_i і a_{10+i} ($i=1, \dots, 10$) прийняти в якості нового значення a_i , а менше – в якості нового значення a_{10+i} .

Вправа №293. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Якщо в даній послідовності жодне парне число не розміщено після непарного, то одержати всі від'ємні члени послідовності, інакше – всі додатні. Порядок запису чисел в обох випадках замінити на зворотний.

Вправа №294. Дано дійсні числа $r_1, \dots, r_{17}$, серед яких відомо що є як від'ємні, так і невід'ємні. Одержати $x_1 y_1 + \dots + x_s y_s$, де $x_1, \dots, x_p$ – від'ємні члени послідовності $r_1, \dots, r_{17}$, взяті в порядку їх запису, $y_1, \dots, y_q$ – невід'ємні члени, взяті в зворотному порядку, $s = \min(p, q)$.

Вправа №295. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{20}$. Найменший член послідовності $a_1, \dots, a_{20}$ замінити цілою частиною середнього арифметичного всіх членів, решту членів залишити без змін. Якщо в послідовності кілька членів з значенням $\min(a_1, \dots, a_{20})$, то замінити останнє по порядку.

Вправа №296.    Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{20}$ (всі члени попарно різні). поміняти в цій послідовності місцями:

- а) найбільший і найменший члени;
- б) найбільший і останній члени.

Вправа №297. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{100}$. Одержати нову послідовність з 100 цілих чисел, замінюючи a_i нулями якщо $|a_i|$ не дорівнює $\max(a_1, \dots, a_{100})$, і замінюючи a_i одиницею в інших випадках ($i=1, \dots, 100$).

Вправа №298.    Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{25}, b_1, \dots, b_{25}$. Перетворити послідовність $b_1, \dots, b_{25}$ по правилу: якщо $a_i \leq 0$ то b_i збільшити в 10 разів, інакше b_i замінити нулем ($i=1, \dots, 25$).

Вправа №299.    Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{26}$. Необхідно домножити всі члени послідовності $a_1, \dots, a_{26}$ на квадрат її найменшого члена, якщо $a_1 \geq 0$, і на квадрат її найбільшого члена, якщо $a_1 < 0$.

Вправа №300. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Знайти $b_1, \dots, b_{10}$, де b_i рівне сумі тих членів послідовності $a_1, \dots, a_n$, які належать півінтервалу $(i-1, i]$ ($i = 1, \dots, 10$). Якщо півінтервал не має членів послідовності, то відповідно b_i дорівнює рівним нулю.

Вправа №301. Дано дійсні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{20}, y_{20}, r_1, r_2, \dots, r_{11}$ ($0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{11}$). Пари $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{20}, y_{20})$ розглядаються як координати точок на площині. Числа $r_1, \dots, r_{11}$ розглядаються як радіуси одинадцяти напівкругів в на півплощині $y > 0$ з центром на початку координат. Знайти кількість точок, що попадають в середину кожного напівкруга (границі - напівколам не належать напівкругам).

Вправа №302. Дано натуральне число n . Скільки різних цифр зустрічається в його десятковому записі?

Вправа №303. Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_{200}$, які належать напівінтервалу $(0, 1]$. Напівінтервал розбивається на 100 рівних частинок. Знайти $p_1, \dots, p_{100}$, де $p_k = m_k / 2000$, а m_k – кількість заданих чисел, що належать напівінтервалу $(0.01(k-1), 0.01k]$ ($k = 1, \dots, 100$).

Вправа №304. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{16}$. Переставити члени послідовності $a_1, \dots, a_{16}$ так, щоб спочатку розмістились всі невід'ємні члени, а потім – всі від'ємні. Інакше кажучи, після перестановки повинно знайтись таке k , що $1 \leq k \leq 16$, і якщо $i \leq k$, то $a_i \geq 0$; якщо $i > k$, то $a_i < 0$ ($i = 1, \dots, 16$).

Вправа №305.    Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{30}$. Залишити без зміни послідовність $a_1, \dots, a_{30}$, якщо вона впорядковано по незростанню або неспаданню; в інших випадках вилучити з послідовності ті члени, порядкові номери яких кратні чотирьом, зберігши попереднім порядок залишених членів.

Вправа №306. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Числа x_i, y_i є координатами точок. Побудувати на екрані точки, задані послідовністю $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$, а потім знищити їх. Процес побудови повинен починатися точкою з номера 1 і закінчуватися точкою з номером n ; процес знищення точок повинен проходити в зворотному порядку – починаються точкою з номером n і кінчаються точкою з номером 1.

Вправа №307. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Числа x_i, y_i є координатами точок. Побудувати на екрані точки, задані послідовністю $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Точки повинні будуватись по чергово: побудова кожної

наступної точки повинно продовжитися знищенням попередньої. Процес побудови повинні зробити два рази: перший раз починаючи точкою з номера 1 і закінчуючи точкою з номером n , другий раз – в зворотному порядку – починаючи точкою з номером n і закінчуючи точкою з номером 1.

Вправа №308. В умові попередньої задачі вносяться зміни: почергову побудову точок треба зробити так, що б після появи на екрані перших трьох точок побудова кожної нової точки супроводжувалась знищенням точки, яка була побудована раніше трьох інших видимих точок.

Вправа №309. Дано натуральні числа $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \dots, x_n, y_n, r_n$. Числа x_i, y_i є центрами кругів радіуса r_i . Побудувати на екрані круги, задані послідовністю $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \dots, x_n, y_n, r_n$, а потім зафарбувати їх (одним і тим же кольором або різними кольорами). Процес побудови повинен починатися кругом з номером 1 і закінчуватися кругом з номером n ; процес зафарбування повинен проходити в зворотному порядку – починатися кругом з номером n і закінчуватись кругом з номером 1.

Вправа №310. Дано натуральні числа $x, y, r_1, r_2, \dots, r_n$. Числа r_i є сторонами квадратів з центрами в точці (x, y) . Побудувати на екрані квадрати, задані послідовністю $r_1, r_2, \dots, r_n$, а потім знищити їх. Процес побудови повинен починатися квадратом з номером 1 і закінчуватися квадратом з номером n ; процес знищення повинен проходити зворотному порядку — починаючи квадратом з номером n і закінчуючи кругом з номером 1.

Вправа №311. Дано натуральні числа $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \dots, x_n, y_n, r_n$. Побудувати на екрані кола з центрами в точках (x_i, y_i) і радіусами r_i , якщо серед $r_1, r_2, \dots, r_n$ знайдеться число, менше 5, і квадрати з центрами в точках (x_i, y_i) і сторонами r_i в іншому випадку.

Вправа №312. ● Дано символи $s_1, \dots, s_n$. Залишити послідовність $s_1, \dots, s_n$ без змін, якщо в неї не входить символ *, інакше кожний символ /, що передує першому входженню символу *:

- а) замінити на кому;
- б) вилучити з послідовності.

Вправа №313. Дано символи $s_1, \dots, s_n$. Якщо послідовність $s_1, \dots, s_n$ є паліндромом, тобто $s_1 = s_n, s_2 = s_{n-1}, \dots$, то залишити її без змін, в іншому випадку одержати послідовність $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n-1}, \dots, s_2, s_1$.

Вправа №314. ● Дано символи $s_1, \dots, s_{66}$. Якщо послідовність $s_1, \dots, s_n$ така, що $s_1 = s_{34}, s_2 = s_{35}, \dots, s_{33} = s_{66}$, то залишити його без змін, інакше одержати послідовність $s_1, s_2, \dots, s_{66}, s_1, s_2, \dots, s_{66}$.

Вправа №315. ● Дано символи $s_1, \dots, s_{80}$. Визначити кількість невірних рівностей серед:

- а) $s_1 = s_{41}, s_2 = s_{42}, \dots, s_{40} = s_{80}$;

б) $s_1 = s_{80}, s_2 = s_{79}, \dots, s_{40} = s_{41}$.

Вправа №316. ● Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Будемо розглядати слова, утворені символами, які входять в послідовність $s_1, \dots, s_n$ (див. вправу 269, вважаючи, що кількість символів в кожному слові не перевершує 15).

а) Знайти яке-небудь слово, яке закінчується буквою d (якщо таких слів немає, то повідомити про це).

б) Знайти яке-небудь слово, яке починається буквою a і закінчується буквою y (якщо таких слів немає, то повідомити про це).

в) Вилучити з $s_1, \dots, s_n$ всі слова з непарними порядковими номерами і перевернути всі слова з парними номерами. Наприклад, якщо $n=21$ і дана послідовність символів представляє собою послідовність

во □ что □ бы □ то □ ни □ стало,

то повинна одержатись послідовність

отч □ от □ олатс.

г) Вилучити з $s_1, \dots, s_n$ всі слова, в яких зустрічається не більше двох різних букв.

д) Вилучити з $s_1, \dots, s_n$ всі слова, які закінчуються групою букв *кая* або *кое*.

*) Вправи 312 – 316 допускають рядкові варіанти.

§ 10. Вкладені цикли.

Вправа №317. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{10}$. Знайти $a_1 + a_2^2 + \dots + a_{10}^{10}$.

Вправа №318. Дано натуральне число. Знайти $f_0 f_1 \dots f_n$, де

$$f_i = \frac{1}{i^2 + 1} + \frac{1}{i^2 + 2} + \dots + \frac{1}{i^2 + i + 1}.$$

Вправа №319. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{24}$. Знайти послідовність

$b_1, \dots, b_{10}$, де $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{24}$, $b_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{24}^2, \dots, b_{10} = a_1^{10} + a_2^{10} + \dots + a_{24}^{10}$.

Вправа №320. Знайти $\sum_{k=1}^{10} k^3 \sum_{l=1}^{15} (k-l)^2$.

Вправа №321. Дано натуральні числа m, n , дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_{mn}$. Знайти $a_1 a_2 \dots a_m + a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{2m} + a_{(n-1)m+1} a_{(n-1)m+2} \dots a_{mn}$.

Вправа №322. ● ● ● Знайти натуральне число від 1 до 10000 з максимальною сумою дільників.

Вправа №323. Дано натуральне число n . Одержати всі натуральні числа, менші n і взаємпростим з ним.

Вправа №324. Дано цілі числа p і q . Одержати всі дільники числа q , взаємнопрости з p .

Вправа №325. Дано натуральне число n . Одержати всі прості дільники цього числа.

Вправа №326. Знайти найменше натуральне число n , яке можна представити двома різними способами у вигляді суми кубів двох натуральних чисел $x^3 + y^3$ ($x \geq y$).

Вправа №327. Дано натуральні числа a, b ($a \leq b$). Одержати всі прості числа p , що задовольняють нерівність $a \leq p \leq b$.

Вправа №328. ● ● ● знайти 100 перших простих чисел.

Вправа №329. Дано натуральні числа n, m . Одержати всі менші n натуральні числа, квадрат суми цифр яких дорівнює m .

Вправа №330. ● ● ● Натуральне число називається *досконалим*, якщо воно дорівнює сумі всіх своїх дільників, за винятком себе самого. Число 6 – досконале, так як $6 = 1 + 2 + 3$. Число 8 – не досконале, так як $8 \neq 1 + 2 + 4$.

Дано натуральне число n . Одержати всі досконалі числа, які менші n .

Вправа №331. Дано натуральне число n . Чи можна представити у вигляді суми трьох квадратів натуральних чисел? Якщо можна, то

- а) вказати трійку x, y, z таких натуральних чисел, що $n = x^2 + y^2 + z^2$;
- б) вказати всі трійки x, y, z таких натуральних чисел, що $n = x^2 + y^2 + z^2$.

Вправа №332. Відомо, що любе натуральне число можна представити у вигляді суми не більше ніж чотирьох квадратів натуральних чисел або, що те саме, у вигляді суми чотирьох квадратів невід'ємних чисел (теорема Лагранжа). Дано натуральне n ; вказати такі невід'ємні цілі x, y, z, t , що $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

Вправа №333. Дано натуральні числа $m, n_1, \dots, n_m$ ($m \geq 2$). Знайти НСД ($n_1, \dots, n_m$), скориставшись для цього рівністю $\text{НСД}(n_1, \dots, n_k) = \text{НСД}(\text{НСД}(n_1, \dots, n_{k-1}), n_k)$ ($k = 3, \dots, m$) і алгоритмом Евкліда (див. вправу 89).

Вправа №334. Знайти:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{i+j^2}; & \text{б)} \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{60} \sin(i^3 + j^4); \\ \text{в)} \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} \frac{j-i+1}{i+j}; & \text{г)} \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^i \frac{1}{2j+i}. \end{array}$$

Вправа №335. Дано натуральне число n . Знайти:

$$\text{а)} \sum_{k=1}^n k(k+1) \dots k^2; \quad \text{б)} \sum_{k=1}^n k^k;$$

$$\text{в)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k^2)!}; \quad \text{г)} \sum_{k=1}^n (-1)^k (2k^2 + 1)!.$$

Вправа №336. Дано натуральне число n , дійсне число x . Знайти:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{i=1}^n \frac{(2i)! + |x|}{(i^2)!}; \quad \text{б)} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^k}{(k!+1)!}; \\ \text{в)} \sum_{k=1}^n k^k x^{2k}; \quad \text{г)} \sum_{k=1}^n \sum_{m=k}^n \frac{x+k}{m}. \end{aligned}$$

Вправа №337. Дано дійсні числа a, b ($a < b$), натуральне число n , функція $y=f(x)$, опре ділена на відрізку $[a, b]$. Вивести на друкуючий пристрій графік функції. Для побудови графіка знайти значення функції $y_i = f(x_i)$, де

$$X_i = a + ih, \quad i=0, 1, \dots, n, \quad h=(b-a)/n.$$

Вісь O_x розмістити вертикально, вісь O_y — горизонтально. Шаг по осі O_x — це перехід на нову строчку, шаг по осі O_y — позиція наступного символу в наступній строчці. Точки графіка зображати символом *.

Роздивитись наступні функції:

$$\text{А)} y = |\sin x| + \cos |x|, \quad a=0, b=\pi, n=40;$$

$$\text{б)} y = 2\sin x + 3\cos x, \quad a=-\pi, b=\pi, n=50;$$

$$\text{в)} y = \sqrt{x^4 + 1}, \quad a=-1, b=2, n=30;$$

$$\text{г)} y = \frac{1}{x^2 - x + 1}, \quad a=-1, b=3, n=40;$$

$$\text{д)} y = \frac{x-3}{x^2 + 2}, \quad a=-1, b=4, n=50;$$

$$\text{е)} y = x^2 e^{-|x|}, \quad a=-1, b=3, n=40;$$

$$\text{ж)} y = e^{-x} \sin 2x, \quad a=\pi/2, b=2\pi, n=50;$$

$$\text{з)} \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}, \quad a=-3, b=3, n=50.$$

Вправа №338. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_{25}, b_1, \dots, b_n$. Серед $a_1, \dots, a_{25}$ немає чисел, які повторюються, немає їх і серед $b_1, \dots, b_n$.

а) Побудувати переріз послідовностей $a_1, \dots, a_{25}$ і $b_1, \dots, b_n$ (тобто одержати в якому-небудь порядку всі числа, які належать послідовності $a_1, \dots, a_{25}$ і послідовності $b_1, \dots, b_n$ одночасно).

б) Побудувати об'єднання даних послідовностей.

в) Одержати всі члени послідовності $b_1, \dots, b_n$, які не входять в послідовність $a_1, \dots, a_{25}$.

г) Чи вірно, що всі члени послідовності $a_1, \dots, a_{25}$ входять в послідовність $b_1, \dots, b_n$?

д) Чи вірно, що всі члени послідовності $b_1, \dots, b_n$ входять в послідовність $a_1, \dots, a_{25}$?

е) Чи вірно, що всі члени послідовності $a_1, \dots, a_{25}$ входять в послідовність $b_1, \dots, b_n$ і при цьому a_1 зустрічається в послідовності $b_1, \dots, b_n$ не пізніше a_2 , a_2 — не пізніше, ніж a_3 і т.д.

Вправа №339. ● ● ● Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$ (в цій послідовності можуть бути члени, що повторюються).

- а) Одержати всі числа, які входять в послідовність по одному разу.
- б) Одержати числа, взяті по одному з кожної групи рівних членів.
- в) Знайти число різних членів послідовності.
- г) Встановити, скільки чисел входить в послідовність по одному разу.
- д) Встановити, скільки чисел входить в послідовність більше ніж по одному разу.
- е) Вияснити, чи є в послідовності хоча б одна пара співпадаючих чисел.

Вправа №340. Дано цілі числа $m, a_1, \dots, a_{20}$. Знайти три натуральних числа i, j, k , кожне з яких не перевершує двадцяти, такі, що $a_i + a_j + a_k = m$. Якщо таких чисел немає, то повідомити про це.

Вправа №341. ● ● ● Дано п'ять різних цілих чисел. Знайти серед них два числа, модуль різниці яких має:

- а) найбільш значення;
- б) найменше значення.

Вправа №342. ● ● ● Дано дійсні числа $x, y_1, \dots, y_{25}$. В послідовності $y_1, \dots, y_{25}$ Знайти два члена, середньоарифметичне яких найближче до x .

Вправа №343. Дано натуральні числа $x_1, \dots, x_{17}$. Знайти суму значень $|x_i - x_j|$ ($1 \leq i < j \leq 17$).

Вправа №344. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{10}$, натуральне число m . Послідовність $b_1, b_2, \dots$ утворено по закону $b_1 = a_1, \dots, b_{10} = a_{10}$, $b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + \dots + b_{k-10}$, $k = 11, 12, \dots$ знайти b_m .

Вправа №345. Нехай $t_0 = 1$, $t_k = t_0 t_{k-1} + t_1 t_{k-2} + \dots + t_{k-2} t_1 + t_{k-1} t_0$, $k = 1, 2, \dots$ Знайти t_{10} .

Вправа №346. Дано натуральне число k , дійсне число ($a > 0$). Послідовність $x_0, x_1, \dots$ обчислюється по закону $x_0 = a$, $x_i = \frac{k-1}{k} x_{i-1} + \frac{a}{x_{i-1}^{k-1}}$, $i = 1, 2, \dots$. Знайти перше значення x_n , для якого $|x_n^k - a| < 10^{-4}$ (послідовність $x_0, x_1, \dots$ приходить до $\sqrt[k]{a}$).

Вправа №347. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{30}$. Нехай M — найбільше, а m — найменше із $a_1, \dots, a_{30}$. Знайти в порядку зростання всі цілі із інтервалу (m, M) , які не входять у послідовність $a_1, \dots, a_{30}$.

Вправа №348. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Чи вірно що ці дві послідовності відрізняються не більше чим порядком послідовності членів?

Вправа №349. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Для кожного з чисел, які входять в послідовність $a_1, \dots, a_n$. Результат представити у вигляді рядків, перший з яких є $a_1 - k$, де k – число входжень a_1 в послідовність $a_1, \dots, a_n$. Другий рядок буде мати вигляд $a_i - m$, де a_i – перший по порядку член послідовності, відмінний від a_1 , а m – число входжень цього члена в послідовність.

Вправа №350. Дано натуральні числа k, n , дійсні числа $a_1, \dots, a_{kn}$; Знайти:

- а) послідовність $a_1 + \dots + a_k, a_{k+1} + \dots + a_{2k}, \dots, a_{k(n-1)+1} + \dots + a_{kn}$;
- б) послідовність $\max(a_1, \dots, a_k), \max(a_{k+1}, \dots, a_{2k}), \dots, \max(a_{k(n-1)+1}, \dots, a_{kn})$;
- в) $\min(a_1, \dots, a_k) + \min(a_{k+1}, \dots, a_{2k}) + \dots + \min(a_{k(n-1)+1}, \dots, a_{kn})$;
- г) $\max(a_1 + \dots + a_k, a_{k+1} + \dots + a_{2k}, a_{k(n-1)+1} + \dots + a_{kn})$;
- д) $\min(\max(a_1, \dots, a_k), \max(a_{k+1}, \dots, a_{2k}), \dots, \max(a_{k(n-1)+1}, \dots, a_{kn}))$.

Вправа №351. Дано натуральні числа $a_1, \dots, a_n$. Відомо що $a_1, \dots, a_n$ – перестановка чисел $1, \dots, n$, в послідовності $a_1, \dots, a_n$ зустрічаються всі числа $1, \dots, n$. Будемо говорити, що натуральне m переводиться даною перестановкою в натуральне k ($m \leq n, k \leq n$), якщо $a_m = k$. Наприклад, число 1 переводиться у a_1 , a_1 переводиться у a_{a_1} і т. д. Розглянемо знайдену цим способом послідовності $1, a_1, a_{a_1}, \dots$

а) Доведіть, що перший член цієї послідовності, для якого маються рівні серед попередніх, є 1 . Знайти по порядку всі члени послідовності $1, a_1, a_{a_1}, \dots$, що передують повторному числу 1 .

б) Крім тої послідовності, яку потрібно знайти в а), знайти аналогічні послідовності, що починаються з чисел, більших 1 . При цьому послідовності повинні бути попарно різні, і кожна із них повинна починатися з найменшого члена. Наприклад, якщо $n=6, a_1=3, a_2=2, a_3=5, a_4=6, a_5=1, a_6=4$, то повинні бути одержані послідовності

1, 3, 5
2
4, 6.

Вправа №352. Нехай кольори екрана мають номери $0, 1, \dots, k$. Висвітити всі точки екрана (або точки деякої прямокутної області) різними кольорами, використовуючи для точки з координатами i, j колір з номером, рівним залишку від ділення $|m|$ на $k+1$, де m може бути взято, наприклад, рівним:

- а) $i+j$;
- б) $(i-10)^2 + 25j^2$;
- в) $(i-50)^2 - j$;
- г) $25(i+5) + (i-5)j^2$;
- д) $(i-50)^2 - (j-50)^3$;
- е) $(i^2 + j^2)^2 - 2(i^2 - j^2)$.

Вправа №353. Дано натуральні числа $x_1, y_1, \dots, x_{10}, y_{10}$. Побудувати на екрані точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$, які входять у послідовність рівно один раз.

Вправа №354. Дано натуральні числа $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Побудувати на екрані точки з координатами x_i, y_i ($i=1, \dots, n$) і з'єднати відрізками прямих:

- а) кожену із n точок з всіма іншими $n-1$ точками;
- б) точки з номерами одної парності;

в) точки з номерами різної парності.

Вправа №355. Дано натуральні числа $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Побудувати на екрані точки з координатами $(i=1, \dots, n)$ і з'єднати пари найбільше віддалених одна від іншої.

Вправа №356. Дано натуральні числа $x_1, y_1, c_1, \dots, x_n, y_n, c_n$. Кожні три числа x_i, y_i, c_i даються координати точки і колір $(i=1, \dots, n)$. Із точок одного кольору знайти на екрані:

- а) першу;
- б) останню.

Вправа №357. Дано натуральні числа $x_1, y_1, r_1, \dots, x_n, y_n, r_n$, які надають послідовність окружностей так, що x_i, y_i — координати центра, а r_i — радіус i -го кола $(i=1, \dots, n)$. Знайти на екрані кола, які мають одні точки з деякими іншими колами послідовності.

Вправа №358. Знайти кола, вказані у попередній задачі, і додатково повністю зафарбувати яким-небудь одним кольором частину екрана, покриту кругами, обмеженими цими колами (Рис. 17).

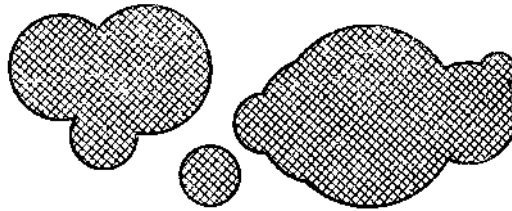


Рис.17

Вправа №359. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_{10}, t_1, \dots, t_n^*$. Одержати всі натуральні i , які не перевершують $n-9$, для яких $s_1=t_i, s_2=t_{i+1}, \dots, s_{10}=t_{i+9}$.

Вправа №360. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Знайти всі паліндромічні початкові відрізки послідовності $s_1, \dots, s_n$, тобто такі відрізки $s_1, \dots, s_k (k \leq n)$, $s_1=s_k, s_2=s_{k-1}, \dots$

Вправа №361. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Вказати всі натуральні i , для яких $2i \leq n$, і $s_1=s_{i+1}, s_2=s_{i+2}, \dots, s_i=s_{2i}$.

Вправа №362. Дано символи $s_1, \dots, s_n$. Знайти таке найбільше натуральне i , що $2i < n, s_1=s_{i+1}, s_2=s_{i+2}, \dots, s_i=s_{2i}, s_1, s_2, \dots, s_i$ — паліндром, тобто $s_1=s_i, s_2=s_{i-1}, \dots$

Вправа №363. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Перетворити послідовність $s_1, \dots, s_n$, додавши до неї найменше число символів $s_{n+1}, \dots, s_m$ так, щоб послідовність $s_1, \dots, s_m$ стала паліндромом: $s_1=s_m, s_2=s_{m-1}, \dots$

*) Вправи №359 – №366 допускають рядкові варіанти.

Вправа №364. Дано символи $s_1, \dots, s_{50}$. Встановити, чи вірно що хоча б один символ входить в $s_1, \dots, s_{50}$ більше одного разу і при цьому так, що між довільними двома його входженнями зустрічається буква a або b .

Вправа №365. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Будемо розглядати слова, утворені символами, що входять в послідовність $s_1, \dots, s_n$ (див. вправу 269), вважаючи при цьому, що кількість символів в кожному слові не перевершує 15.

а) Знайти найбільшу довжину слів-паліндромів. (Якщо паліндромів не має, то відповіддю повинно бути число 0.)

б) Встановити, чи вірно, що кожне слово, що не є паліндромом, має парну довжину.

в) Встановити, чи є два слова, кожне з яких одержується перевертанням іншого.

г) Вилучити з $s_1, \dots, s_n$ всі слова, які зустрічаються більше двох разів.

Вправа №366. Дано символи $a_1, \dots, a_{10}$ натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Як і в попередній задачі, будемо розглядати слова, які входять в послідовність як і раніше вважаючи, що кількість символів в кожному слові не перевищує 15. будемо також вважати, що серед символів $a_1, \dots, a_{10}$ немає пропусків, і тому послідовність $a_1, \dots, a_{10}$ може розглядатися як одне слово. В словах можуть зустрітися помилки:

- 1) переставлені дві сусідні букви;
- 2) замінена одна буква;
- 3) пропущена одна буква.

Потрібно знайти в $s_1, \dots, s_n$ всі слова, із яких могло б отриматись $a_1, \dots, a_{10}$ в результаті однієї помилки.

§ 11. Вкладені цикли в матричних задачах

Вправа №367. Дані цілі числа a_1, a_2, a_3 . Дістати цілочисельну матрицю $[b_{ij}]_{i,j=1,2,3}$, для якої $b_{ij} = a_i - 3a_j$.

Вправа №368. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{20}$. Отримати дійсну матрицю $[c_{ij}]_{i,j=1,2,3} = a_j / (1 + |b_i|)$.

Вправа №369. Отримати $[a_{ij}]_{i=1, \dots, 10; j=1, \dots, 12}$ — цілочисельну матрицю, для якої $a_{ij} = i + 2j$.

Вправа № 370. Дано натуральне число n . Отримати дійсну матрицю $[a_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$, для якої

а) $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$;

б) $a_{ij} = \begin{cases} \sin(i+j) & \text{при } i < j, \\ 1 & \text{при } i = j, \\ \arcsin \frac{i+j}{2i+3j} & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Вправа №371. Дана дійсна квадратна матриця $[a_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$. Отримати дві квадратні матриці $[b_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$, $[c_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$, для яких

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } j \geq 1, \\ a_{ij} & \text{при } j < i, \end{cases} \quad c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } j < 1, \\ a_{ij} & \text{при } j \geq i, \end{cases}$$

Вправа №372. Одержати дійсну матрицю $[a_{ij}]_{i,j=1, \dots, 7}$, перший рядок якої задається формулою $a_{1j} = 2j + 3$ ($j=1, \dots, 7$), другий рядок задається формулою $a_{2j} = j - \frac{3}{2+1/j}$ ($j=1, \dots, 7$), а кожний наступний рядок є сумою двох попередніх.

Вправа №373.    Дано натуральне число n , дійсна матриця розміру $n \times 9$. Знайти середнє арифметичне:

а) кожного з стовпців;

б) кожного з стовпців, які мають парні номери;

в) в порядку зростання середніх арифметичних значень по кожному рядку.

Вправа №374. Дана дійсна матриця розміру $n \times m$. Встановити, скільки додатних елементів містить матриця $[a_{i,j}]_{i,j=1, \dots, n}$, якщо

а) $a_{i,j} = \sin(i+j/2)$;

б) $a_{i,j} = \cos(i^2+n)$;

в) $a_{i,j} = \sin\left(\frac{i^2 - j^2}{n}\right)$.

Вправа №375. Дана дійсна матриця розміру $n \times m$, в якій не всі елементи дорівнюють нулю. Одержати нову матрицю шляхом ділення всіх елементів даної матриці на її найбільший по модулю елемент.

Вправа №376. Дано натуральне число m , цілі числа $a_1, \dots, a_n$ і цілочисельна квадратна матриця порядку m . Рядок з номером i матриці назвемо відміченим, якщо $a_i > 0$, і невідміченим в інших випадках.

а) Потрібно всі елементи розміщені у відмічених рядках матриці, перетворити по правилу: від'ємні елементи замінити на -1 , додатні – на 1 , а нульові залишити без змін.

б) Підрахувати число від'ємних елементів матриці розміщених у відмічених рядках.

Вправа №377. Дана дійсна квадратна матриця порядку 12. Замінити нулями всі її елементи, розміщені на головній діагоналі і вище неї.

Вправа №378. Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_8$. одержати дійсну квадратну матрицю порядку 8:

а)
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_8 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_8^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^8 & x_2^8 & \dots & x_8^8 \end{bmatrix}$$

б)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^7 & x_2^7 & \dots & x_8^7 \end{bmatrix}$$

Вправа №379. Дана дійсна матриця розміру $n \times m$. Визначити числа $b_1, \dots, b_m$, рівні відповідно:

а) сумам елементів рядків;

б) добутку елементів рядків;

в) найменшим значенням елементів рядків;

г) значенням середніх арифметичних елементів рядків;

д) різниці найбільших і найменших значень елементів рядків.

Вправа №380. Дано натуральне число n , дійсна матриця $[a_{i,j}]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}$. Одержати послідовність елементів головної діагоналі $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Вправа №381. Всі елементи з найбільшим значенням в даній цілочисельній квадратній матриці порядку 10 замінити нулями.

Вправа №382. ● ● ● Дана дійсна матриця розміру 6×9 . Знати середнє арифметичне найбільшого і найменшого значення його елементів.

Вправа №383. ● ● ● Дана дійсна матриця розміру $18 \times n$. Знайти значення найбільшого по модулю елемента матриці, а також індекси якого-небудь з знайденим значення модуля.

Вправа №384. ● ● ● Дана дійсна матриця розміру $m \times n$. Знайти суму найбільших значень елементів її рядків.

Вправа №385. ● ● ● В даній дійсній квадратній матриці порядку n знайти суму елементів рядка, в якій розміщений елемент з найменшим значенням. Передбачається, що такий елемент єдиний.

Вправа №386. ● ● ● В даній дійсній матриці розміру 6×9 поміняти місцями рядок, який містить елемент з найбільшим значенням, з рядком, який містить найменше значення. Передбачається, що ці елементи єдині.

Вправа №387. ● ● ● Дано натуральне число n , дійсна квадратна матриця порядку n , дійсні $a_1, \dots, a_{n+5}$. Елементи послідовності $a_1, \dots, a_{n+5}$ домножити на 10, якщо найбільший елемент матриці (передбачається, що такий елемент єдиний) знаходиться на головній діагоналі, і на 0,5 в інших випадках.

Вправа №388. ● ● ● В даній квадратній цілочисельній матриці порядку 17 вказати індекси всіх елементів з найбільшим значенням.

Вправа №389. ● ● ● Дана дійсна матриця розміру $n \times m$, всі елементи якої різні. В кожному рядку вибирається елемент з найменшим значенням, потім серед цих чисел вибирається найбільший. Вказати індекси елемента з найбільшим значенням.

Вправа №390. ● ● ● Дана дійсна матриця розміру $n \times m$. Одержати послідовність $b_1, \dots, b_n$, де b_k – це

- а) найбільше із значень елементів k -го рядка;
- б) сума найбільшого і найменшого із значень елементів k -го рядка;
- в) число від'ємних елементів k -го рядка;
- г) добуток квадратів тих елементів k -го рядка, модулі яких належать відріzkу $[1, 1.5]$.

Вправа №391. Дано натуральне число n , цілочисельна матриця $[a_{ij}]_{i=1, 2; j=1, \dots, m}$. Знайти суму тих елементів a_{2j} ($j=1, \dots, m$), для яких a_{ij} має значення найбільшого серед значень $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}$.

Вправа №392. ● ● ● Дана цілочисельна квадратна матриця порядку 8. Знайти найменше значення з елементів стовпчика, який має найбільшу

суму модулів елементів. Якщо таких стовпчиків кілька, то взяти перший з них.

Вправа №393. Дано натуральне число n , дійсна квадратна матриця порядку n . Одержати $b_1, \dots, b_n$, де b_i – це

- а) найменше з значень елементів, які знаходяться на початку i -го рядка матриці до елемента, який належить головній діагоналі, включно;
- б) значення першого по порядку додатного елемента i -го рядка (якщо таких елементів немає, то прийняти $b_i=1$);
- в) сума елементів, розміщених за першим від'ємним елементом в i -ому рядку (якщо всі елементи рядка невід'ємні, то прийняти $b_i=100$);
- г) сума елементів, які передують останньому від'ємному елементу в i -ому рядку (якщо всі елементи рядка невід'ємні, то прийняти $b_i = -1$).

Вправа №394. Дана цілочисельна квадратна матриця порядку n . Знайти номери рядків:

- а) всі елементи яких – нулі;
- б) елементи в кожному з яких однакові;
- в) всі елементи яких парні;
- г) елементи кожного з яких утворюють монотонну послідовність (монотонно спаду чи монотонно зростаючу);
- д) елементи якого утворюють симетричні послідовності (паліндроми).

Вправа №395. Дано натуральне число n , дійсне число x , дійсна матриця розміру $n \times 2n$. Одержати послідовність $b_1, \dots, b_n$ з нулів та одиниць, де $b_i=1$ якщо елементи i -го рядка матриці не перевершують x , і $b_i=0$ в інших випадках.

Вправа №396. Дана дійсна квадратна матриця порядку n . Побудувати послідовність дійсних чисел $a_1, \dots, a_n$ по правилу: якщо в i -ому рядку матриці елемент, який належить головній діагоналі, від'ємний, то a_i дорівнює сумі елементів i -го рядка, що передують першому від'ємному елементу, в інших випадках a_i дорівнює сумі останніх елементів i -го рядка, починаючи з першого по порядку невід'ємного елемента.

Вправа №397. Дана дійсна квадратна матриця порядку 10. В рядках з від'ємним елементом на головній діагоналі знайти:

- а) суму всіх елементів;
- б) найбільший з усіх елементів;

Вправа №398. Дана дійсна квадратна матриця порядку n . Розглянемо ті елементи, які розміщені в рядках, які починаються з від'ємного елемента. Знайти суму тих з них, які розміщені відповідно нижче і вище і на головній діагоналі.

Вправа №399. Дана дійсна квадратна матриця порядку 9. Одержати цілочисельну квадратну матрицю того ж порядку, в якій елемент дорівнює одиниці, якщо відповідний йому елемент даної матриці більше елемента

розміщеного в його рядку на головній діагоналі, і дорівнює нулю в інших випадках.

Вправа №400. Дана дійсна квадратна матриця порядку n . Одержати $x_1x_n + x_2x_{n-1} + \dots + x_nx_1$, де x_k – найбільше значення елементів k -го рядка матриці.

Вправа №401. Дана дійсна квадратна матриця порядку n , натуральні числа i, j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$). З матриці вилучити i -й рядок і j -й стовпчику.

Вправа №402. Дано натуральне число $n \geq 2$, дійсна квадратна матриця порядку n . Побудувати послідовність $b_1, \dots, b_n$ з нулів і одиниць, в якій $b_i = 1$ тоді і тільки тоді, коли

- а) елементи i -го рядка матриці утворюють зростаючу послідовність;
- б) елементи i -го рядка матриці утворюють зростаючу або спадаючу послідовність.

Вправа №403. Дана цілочисельна квадратна матриця порядку 15. Встановити, чи маються в матриці ненульові елементи, і якщо є, то вказати індекси:

- а) одного з нульових елементів;
- б) всіх ненульових елементів.

Вправа №404. Дано натуральні числа i, j , дійсна матриця порядку 18×24 ($1 \leq i < j \leq 24$). Поміняти в матриці містами i -й рядок і j -й стовпчик.

Вправа №405. Дано натуральне число n , дійсна квадратна матриця порядку n . Побудувати послідовність $b_1, \dots, b_n$ з нулів та одиниць, в якій $b_i = 1$ тоді і тільки тоді, коли в i -му рядку матриці є хоча б один від'ємний елемент.

Вправа №406. При допомозі $[x_{ij}]_{i=1, 2; j=1, \dots, n}$ – дійсної матриці на площині задано n точок так, що x_{1j}, x_{2j} – координати j -ої точки. Точки попарно з'єднані відрізками. Знайти довжину найбільшого відрізка.

Вправа №407. Дано натуральні числа n та m , дійсне число r , дійсна матриця розміру $n \times m$. Одержати значення

$$b_1 r^{n-1} + b_2 r^{n-2} + \dots + b_n,$$

де b_k – перший по порядку додатній елемент в k -рядку матриці ($k=1, 2, \dots, n$); якщо в k -рядку немає додатних елементів, то $b_k=0,5$.

Вправа №408. Знайти суму квадратів тих елементів a_{ij} матриці $[a_{ij}]_{i,j=1, \dots, 10}$, для яких виконується $2 \leq i \leq 9, 2 \leq j \leq 9$,

$$a_{ij} \geq \frac{a_{i-1j} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{ij+1}}{4}$$

Вправа №409. Дана дійсна квадратна матриця порядку n . Обчислити тих із її елементів, розміщених на головній діагоналі і вище неї, які перевершують по величині всі елементи, розміщені нижче головної діагоналі.

Якщо на головній діагоналі і вище неї немає елементів з вказаними властивостями, то відповіддю повинно служити повідомлення про це.

Вправа №410. Дана матриця цілих чисел $[a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$, одержати $b_1, \dots, b_n$, де b_i – це

$$\text{а) } \sum_{j=1}^n a_{ij}^2;$$

$$\text{б) } \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}$$

$$\text{в) } \prod_{j=1}^n a_{ij};$$

$$\text{г) } \sum_{j=1}^n |a_{ji}|;$$

$$\text{д) } \prod_j a_{ji} \text{ для таких } j, \text{ що } 1 < a_{ji} \leq n;$$

$$\text{е) } \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}. \quad \min_{1 \leq j \leq n} a_{ji}.$$

Вправа №411. Будемо називати сусідами елемента з індексами i, j деякої матриці такі елементи цієї матриці, відповідні індекси якої відмінні від i і j не більше ніж на одиницю. Для даної цілочисельної матриці $[a_{ij}]_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$, знайти матрицю із нулів та одиниць $[b_{ij}]_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$ елемент який b_{ij} дорівнює одиниці, коли

- а) всі сусіди a_{ij} менші самого a_{ij} ;
- б) всі сусіди a_{ij} і само a_{ij} дорівнюють нулю;
- в) серед сусідів a_{ij} є не менше двох співпадаючих з a_{ij} .

Вправа №412. ● ● ● Дано дві цілочисельні квадратні матриці порядку 6. Знайти послідовність з нулів і одиниць $b_1, \dots, b_6$ таку, що $b_i=1$, тоді

- а) всі елементи i -го рядка першої матриці більші відповідних елементів i -го рядка другої матриці;
- б) всі елементи i -го рядка першої і другої матриць від'ємні;
- в) i -і рядки першої і другої матриць містять разом не більше трьох позитивних елементів;
- г) кількість від'ємних і невід'ємних елементів i -го рядка першої матриці співпадає відповідно кількості від'ємних і невід'ємних елементів i -го рядка другої матриці.

Вправа №413. ● ● ● Таблиця футбольного чемпіонату задана квадратною матрицею порядку n , в якій всі елементи, що належать головній діагоналі, дорівнюють нулю, а кожен елемент, який не належить головній діагоналі, дорівнює 2, 1, або 0 (числу очок, набраних в грі: 3 – виграв, 1 – нічия, 0 – програв).

- а) Знайти число команд, що мають більше перемог, ніж поразок.
- б) Визначити номери команд, які пройшли чемпіонат без поразок.
- в) Вияснити, чи є хоча б одна команда, що виграла більше половини ігор.

Вправа №414. Дано натуральні числа $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Числа x_i, y_i розглядаються як координати i -ї точки ($i=1, 2, \dots, n$). Позначимо через r_{ij} відстань від i -ї точки до j -ї. Одержати на екрані задані точки з'єднати відрізком i -у точку з j -ою в тому випадку, якщо виконується одна з умов:

1) r_{ij} має найбільше значення з $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}$;

2) r_{ji} має найбільше значення з $r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jn}$.

Вправа №415. Дана квадратна матриця цілих чисел порядку n . Кожен елемент матриці ставиться у відповідність точці, яка належить квадратній області екрана розміром $n \times n$ точок. Лівий верхній куток області має координати 0×0 . Відповідність між елементами матриці і точками області екрана встановлюється наступним чином: елемент матриці, який стоїть в рядку з номером i і в стовпці з номером j , відповідають точці екрана, яка знаходиться на перетині рядка точок області з номером i і стовпця точок з номером j . Передбачити, що кожний елемент матриці задає колір відповідної точки екрана, одержати на екрані зображення закодоване в матриці A .

Вправа №416. Дано дві квадратні матриці цілих чисел порядку n . В кожній з матриць закодовано зображення прямокутної області екрана розміром $n \times n$ точок з координатами лівого верхнього кутка $0, 0$ (див. попередню вправу). На відміну від попередньої задачі, всі елементи обох матриць – це числа, які дорівнюють нулю, якщо точка є фоном, або одиниці, якщо точка – частина зображення. Одержати на екрані зображення, яке є:

- перетином зображень, закодованих в першій і другій матрицях;
- об'єднанням зображень, закодованих в першій і другій матрицях.

Вправа №417. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$, матрицю цілих чисел $[a_{ij}]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}$. Послідовність $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ задає координати точок. Матриця вказує, як з'єднати між собою точки $a_{ij}=1$, якщо i -а точка з'єднана з j -ою, і $a_{ij}=0$ в інших випадках ($a_{ij} = a_{ji}$). Одержати на екрані точки, які задані послідовністю $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ і з'єднати їх між собою так, як вказано в даній матриці.

Вправа №418. Нехай $A_1, A_2, \dots$ – послідовність з квадратних матриць з нулів і одиниць така, що порядок матриці A_i дорівнює 3^i і

$$1) A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2) при $i > 1$ має місце

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & 0 & A_{i-1} \\ 0 & A_{i-1} & 0 \\ A_{i-1} & 0 & A_{i-1} \end{bmatrix}$$

де 0 позначає частину матриці заповнену нулями.

Дано натуральне число n . Побудувати зображення квадратної області екрана, закодоване в матриці A_n (див. вправу 415). Лівий верхній куток повинен співпадати з лівим верхнім кутом екрана. Спробувати різні способи використання кольору при побудові зображення. Якщо фоновий колір має номер 0 , а решта кольорів – $1, \dots, k$, то при обробці елемента $a_{ij} \neq 0$ можна,

наприклад, брати колір з номером $l+1$, де l дорівнює залишку від ділення i^2+j^3 на k , і т.д.

Вправа №419. Дана символна квадратна матриця порядку 10. Замінити буквою a всі ті елементи, розміщені вище головної діагоналі.

Вправа №420. Дано натуральне n , символна квадратна матриця порядку n . Одержати послідовність $b_1, \dots, b_n$ з нулів і одиниць, в якій $b_i=1$ тоді і тільки тоді, коли в i -му рядку число символів $*$ не менше число проміжків.

Вправа №421. Дана символна матриця розміру 13×18 . Знайти:

- а) номер першого по порядку рядка, який містить найбільшу кількість цифр;
- б) номер першого по порядку стовпчика, який має найменше число проміжків на перетині з рядками, номери яких парні;
- в) номер останнього по порядку рядка, який містить найбільшу кількість букв $ш, щ$;
- г) номер останнього по порядку стовпчика, в якому міститься найбільша кількість попарно різних символів.

Вправа №422. При передрукуванні тексту на друкарській машинці часто виходить так, що в кінці рядка залишається кілька невикористаних позицій. Число невикористаних позицій міняється від рядка до рядка, і тому правий край надрукованого тексту залишається нерівним. Типографський набір дає рівний правий край, за рахунок збільшення проміжків між словами, які зустрічаються в рядку.

Пропонується вправа вибору проміжків, які підходять. Дана символна матриця $n \times m$, в кожному рядку якої є хоча б один проміжок, за яким слідує відмінний від проміжку символ (тобто є по крайній мірі одна група проміжків всередині рядка). За рахунок зміни групи проміжків всередині рядків необхідно добитись того, щоб вкінці кожного рядка проміжки були відсутні. Кількість проміжків в різних групах, що розміщуються всередині одного й того ж рядка, повинні відрізнятися не більш ніж на одиницю.

Вправа №423. Виконання наступних завдань не вимагає залучення вкладених циклів при роботі з матрицями. Подібні не досить часті ситуації* виникають, як правило, тоді, коли обробляються або досліджуються елементи, які утворюють “одновимірну” частину матриці: рядок, стовпчик, діагональ і т.д.

Дана дійсна квадратна матриця порядку n .

- а) Знайти суму елементів першого стовпчика.
- б) Знайти суму елементів головної і побічної діагоналей.
- в) Знайти найбільше з значень елементів першого та останнього рядка.
- г) Знайти найменше з значень елементів побічної діагоналі і двох сусідніх з нею ліній.
- д) Для даного натурального m ($m \leq 2n$) знайти суму тих елементів матриці, сума індексів яких дорівнює m .

е) Встановити, чи вірно, що найбільше з значень елементів головної діагоналі більше, ніж найменше значення з значень елементів побічної діагоналі.

§ 12. Використання процедур*

*) В вправах цього параграфу будемо для скорочення говорити просто про процедури, розуміючи, що той хто розв'язує задачі сам вибере необхідні засоби програмування – підпрограму, функцію і т.д. Цей вибір повинен бути зроблений з урахуванням як характеру задач, так і особливостей використовуваної мови програмування.

Вправа №424. Дано дійсні числа s, t . Одержати $f(t, -2s, 1.17) + f(2.2, t, s-t)$, де $f(a, b, c) = \frac{2a - b - \sin c}{5 + |c|}$.

Вправа №425. Дано дійсні числа s, t . Одержати $g(1.2, s) + g(t, s) - g(2s-1, st)$,

де

$$g(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + 2ab + 3b^2 + 4}$$

Вправа №426. Дано дійсне число y . Одержати

$$\frac{1.7t(0.25) + 2t(1+y)}{6 - t(y^2 - 1)}, \quad \text{де} \quad t(x) = \frac{\sum_{k=0}^{10} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\sum_{k=0}^{10} \frac{x^{2k}}{(2k)!}}.$$

Вправа №427. Дано дійсні числа a, b, c . Одержати

$$\frac{\max(a, a+b) + \max(a, b+c)}{1 + \max(a+bc, 1, 15)}.$$

Вправа №428. Дано дійсні числа a, b . Одержати $u = \min(a, b)$, $v = \min(ab, a+b)$, $k = \min(u+v^2, 3.14)$.

Вправа №429. Дано натуральні числа n, m, t , цілі числа $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_m, c_1 \dots c_{30}$. Одержати

$$l = \begin{cases} \min(b_1, \dots, b_m) + \min(c_1, \dots, c_{30}) \\ \text{при } |\min(a_1, \dots, a_n)| \geq 0, \\ 1 + (\max(c_1, \dots, c_{30}))^2 \text{ в іншому випадку} \end{cases}$$

Вправа №430. Дано натуральні числа k, l, t , дійсні числа $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_l, z_1 \dots z_m$. Одержати

$$t = \begin{cases} (\max(y_1, \dots, y_l) + \max(z_1, \dots, z_m)) / 2 \\ \text{при } \max(x_1, \dots, x_k) \geq 0, \\ 1 + (\max(x_1, \dots, x_k))^2 \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Вправа №431. Дано дійсні числа s, t . Одержати $h(s, t) + \max(h^2(s-t, st), h^4(s-t, s+t)) + h(1, 1)$,

де

$$h(a, b) = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+a^2} - (a-b)^3$$

Вправа №432. Дано дійсні числа $a_0 \dots a_6$. Одержати для $x=1, 3, 4$ значення $p(x+1) - p(x)$ де $p(y) = a_6 y^6 + a_5 y^5 + \dots + a_0$.

Вправа №433. Дано дійсні числа $s, t, a_0 \dots a_{12}$. Одержати $p(1) - p(t) + p^2(s-t) - p^3(1)$ де $p(x) = a_{12} x^{12} + a_{11} x^{11} + \dots + a_0$.

Вправа №434. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$. В послідовності $a_1, \dots, a_n$ і в послідовності $b_1, \dots, b_m$ всі члени, які слідує за членом з найбільшим значенням (за першим по порядку, якщо їх кілька), замінити на 0.5.

Вправа №435. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, k$. Якщо в послідовності $a_1, \dots, a_n$ немає жодного члена з значенням k , то перший по порядку член цієї послідовності, не менший всіх решти членів, замінити на значення k . По такому ж правилу перетворити послідовність $b_1, \dots, b_m$ примінивши значення 10.

Вправа №436. Дано цілі числа $n_0, d_0, n_1, d_1, \dots, n_7, d_7, u, b$ ($d_0, d_1, \dots, d_7, b \neq 0$).

Обчислити по схемі Горнера $\frac{n_7}{d_7} \left(\frac{a}{b} \right)^7 + \frac{n_6}{d_6} \left(\frac{a}{b} \right)^6 + \dots + \frac{n_0}{d_0}$, визначивши процедури повного скорочення раціонального числа, заданого чисельником і знаменником, а також процедури додавання та множення раціональних чисел.

Вправа №437. Дано цілі числа $f_0, \dots, f_{10}$. Дослідити існування цілочисельних коренів рівняння $f_{10}x^{10} + f_9x^9 + \dots + f_0$. (Якщо $f_0 = 0$, то існує 0; якщо ж $f_0 \neq 0$, то цілочисельних корінь, якщо він існує, належить скінченій множині додатних і від'ємних дільників числа f_0 .) Тут корисно визначити процедуру обчислення по схемі Горнера значення многочлена, а також процедуру, яка по двох заданих числах k і m ($m > k \geq 0$) дозволяє визначити значення найменшого дільника числа m , що знаходиться серед чисел $k+1, k+2, \dots, m$.

Вправа №438. Дано натуральне число n , дійсні числа $x, y, a_n, b_n, a_{n-1}, b_{n-1}, \dots, a_0, b_0$. Вирахувати по схемі Горнера значення многочлена з комплексними коефіцієнтами

$(a_n + ib_n)(x + iy)^n + (a_{n-1} + ib_{n-1})(x + iy)^{n-1} + \dots + (a_0 + ib_0)$. (Визначити процедури виконання арифметичних операцій над комплексними числами).

Вправа №439. Дано дійсні числа $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$. Одержати $2u + \frac{3uw}{2 + w - v} - 7$, де u, v, w комплексні числа $u_1 + i u_2, v_1 + i v_2, w_1 + i w_2$. (Визначити процедури виконання арифметичних операцій над комплексними числами).

Вправа №440. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Розглянути відрізки послідовності $a_1, \dots, a_n$ (підпослідовності членів, що йдуть підряд), що складаються з:

- а) повних квадратів;
- б) степенів п'ятірки;
- в) простих чисел.

В кожному випадку одержати найбільшу з довжин відрізків, що розглядаються. (Визначити процедури, які дозволяють розрізняти повні квадрати, степені п'ятірки, прості числа).

Вправа №441. Дано натуральне число n . Серед чисел $1, 2, \dots, n$ знайти всі ті, які можна представити у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел. (Визначити процедуру, яка дозволяє розпізнавати повні квадрати).

Вправа №442. Дано дійсні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{10}, y_{10}$. Знайти периметр десятикутника, вершини якого мають відповідні координати $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$. (Визначити процедуру визначення відстані між двома точками, заданими своїми координатами).

Вправа №443. Дано дійсні числа a, b, c . Знайти площу п'ятикутника зображеного на малюнку. (Визначити процедуру обчислення площі трикутника по трьох його сторонам).

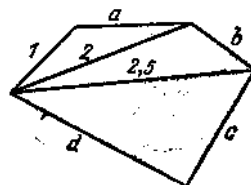


Рис. 18

Вправа №444. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Знайти площу n -кутника, вершини якого при деякому послідовному обході мають координати $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. (Визначити процедуру обчислення площі трикутника по координатах його вершин)

Вправа №445. Дано парне число $n > 2$; перевірити для цього числа гіпотезу Гольдбаха. Ця гіпотеза (до сьогоднішнього дня не відкинута і повністю не доведена) полягає в тому, що кожне парне n , більше двох, представляється у вигляді суми двох простих чисел. (Визначити процедуру, яка дозволяє розрізняти прості числа).

Вправа №446. Дано натуральне число n . Встановити, чи є серед чисел n , $n+1$, ..., $2n$ близнюки, тобто прості числа, різниця між якими дорівнює двом. (Визначити процедуру, яка дозволяє розрізняти прості числа).

Вправа №447. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Розглянути всі відрізки послідовності $a_1, \dots, a_n$ (дивись вправу 440), що складають совершенні числа. Визначити процедуру, яка дозволяє розрізняти совершенні числа).

Вправа №448. Нескінчена послідовність раціональних чисел $v_0, v_1, \dots$ утворена по наступному закону:

- а) $v_0 = 1; v_0 + C_{k+1}^1 v_1 + \dots + C_{k+1}^k v_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots;$
 б) $v_0 = 1; v_0 + C_{2k}^2 v_1 + C_{2k}^4 v_2 + \dots + C_{2k}^{2k} v_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$

Дано невід'ємне ціле число n . (Визначити процедури повного скорочення раціонального числа, заданого чисельником і знаменником, а також процедури додавання і множення раціональних чисел).

Вправа №449. Дано дійсні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_6, y_6$. Точки з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Розглядаються як вершини першого трикутника, точки з координатами $(x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6)$ – другого трикутника. Встановити, чи вірно, що перший трикутник повністю міститься в другому, і якщо так, визначити площу області, яка належить зовнішньому трикутнику і не належить внутрішньому (на мал. область заштрихована). (Визначити процедуру, яка дозволяє встановити, чи лежать дві точки в одній на півплощині відносно заданої прямої (див вправу 52), процедуру обчислення відстані між двома точками, а також процедуру обчислення площі трикутника по трьох сторонах).

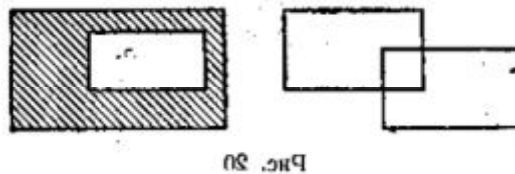


Рис.19

Вправа №450. Два трикутники задані координатами своїх вершин так як вказано в попередній задачі. Встановити, чи лежить який-небудь трикутник повністю всередині другого. Якщо так, то побудувати сторони трикутника і зафарбувати область, яка належить зовнішньому трикутнику і не належить внутрішньому (див мал.). Побудову сторін і зафарбування зробити

однаковим кольором. Якщо жоден з трикутників не лежить повністю всередині другого, побудувати сторони трикутника, використовуючи для кожного трикутника свій колір. (Визначити процедуру, яка дозволяє встановити, чи лежать дві точки в одній на півплощині відносно заданої прямої (див вправу 52) і процедуру побудови сторін трикутника по заданим координатах вершин і номеру кольору).

Вправа №451. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_6, y_6$. Точки з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Розглядаються як вершини першого трикутника, точки з координатами $(x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6)$ – другого. Провести побудови, аналогічні тим, які були описані в попередній задачі по відношенню до трикутників. Сторони прямокутників вважаються паралельними осям екрана. (див.Рис.20)



Вправа №452. Уявіть собі, що в центрі екрану сидить жучок, який може переміщуватись по прямій на вказану відстань і повертатись наліво чи направо. У жучка є перо, яке може залишати слід, який повторює рух жучка. Якщо перо опущено, то слід залишається; якщо перо підняте, сліду немає. Жучок може виконати наступні команди:

- 1) *Forward* – переміститись на задану відстань;
- 2) *Left* – повернути наліво на заданий кут;
- 3) *Right* – повернути направо на заданий кут;
- 4) *Pen Up* – підняти перо;
- 5) *Pen Down* – Опустити перо.

Реалізувати процедури *Forward, Left, Right, Pen Up, Pen Down*. Процедури повинні взаємодіяти через глобальні змінні $xPos, yPos$ – координати жучка на екрані; *Pen* – властивість, яка говорить про те, підняте перо чи опущене; *Angle* – кут, який утворює поточне переміщення жучка з віссю абсцис.

При допомозі перерахованих процедур одержати на екрані:

а) Квадрат з стороною 75 одиниць і центром, який співпадає з центром екрана.

б) Прямокутник з відношенням сторін 1:2 із зрізаними кутами. Зрізаються рівнобедрені прямокутні трикутники, катети яких мають довжину, що дорівнює $1/20$ довжини більшої сторони (див мал.). Довжина меншої сторони – дана величина. Положення прямокутника на екрані може

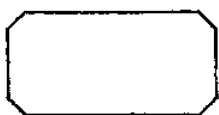


Рис. 21

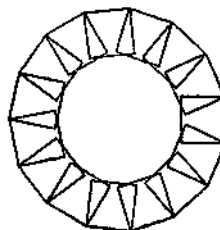


Рис. 22

бути вибрано довільно.

в) Фігуру, яка складена з п'ятнадцяти квадратів, яка зображена на малюнку.

г) Чотири крупні цифри – поточний рік; цифри повинні бути написані по десяти сегментному шаблону (як на поштових листівках).

д) Ті ж цифри, що і в завданні г), але написані по семисегментному шаблону (як на електронних годинниках).

е) Криві Серпінського порядку 1 і 2, зображені на малюнку.

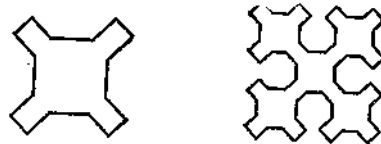


Рис. 23

Вправа №453. Дано натуральні числа k, l, m , символи $s_1, \dots, s_{30}$. Вивести дані символи в такому вигляді:

$\underbrace{\quad \dots \quad}_{k \text{ пробелов}} \quad s_1 \quad \underbrace{\quad \dots \quad}_{l \text{ пробелов}} \quad s_{18} \quad \underbrace{\quad \dots \quad}_{m \text{ пробелов}} \quad *$
 $\quad \quad \quad s_2 \quad \quad \quad s_{17} \quad \quad \quad *$
 $\quad \quad \quad s_{16} \quad \quad \quad s_{30} \quad \quad \quad *$

(Визначити процедуру, звернення до якої дає вивід символу t після n проміжків).

Вправа №454. Дано натуральне число n ; знайти $n!$. Використати програму, яка включає рекурсивну процедуру обчислення $n!$. Чим ця програма гірша нерекурсивної програми обчислення $n!$?

Вправа №455. Дано натуральні числа n, m ; знайти НСД (n, m). Використати програму, яка включає рекурсивну процедуру обчислення НСД, засновану на співвідношенні $\text{НСД}(n, m) = \text{НСД}(m, r)$ де r – залишок від ділення n на m (див. Вправу 89) Чим ця програма гірша нерекурсивної програми обчислення НСД (n, m)?

Вправа №456. Числа Фібоначчі $u_0, u_1, u_2, \dots$ визначаються таким чином: $u_0=0, u_1=1, u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ ($n=2, 3, \dots$) (див.вправу 144). Написати програму обчислення u_n для даного невід'ємного цілого n , що включає рекурсивну процедуру, в основі якої лежить співвідношення $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. Довести по індукції, що при обчисленні u_n ($n=2, 3, \dots$) по цій програмі прийдеться виконати u_n-1 додавання чисел Фібоначчі. Для нерекурсивної програми кількість додавань чисел Фібоначчі при обчисленні u_n для $n=0, 1, 2, 3, \dots, 10$ є відповідно 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, а для рекурсивної – 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 30, 30, 54. Вважаючи на останню обставину ніколи не слід користуватись такого роду рекурсивними процедурами, які базуються на безпосередньому приміненні співвідношень виду

$$x_n = F(x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), k \geq 2.$$

Вправа №457. Дано натуральні числа a, c, m . Одержати $f(m)$ де

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{якщо } 0 \leq n \leq 9 \\ g(n)f(n-1-g(n))+n & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

$g(n)$ = залишок від ділення a_{n+c} на 10.

Використати програму, яка включає рекурсивну процедуру обчислення $f(n)$.

Вправа №458. Дано невід'ємні цілі числа n, m ; обчислити $A(n, m)$, де

$$A(n, m) = \begin{cases} m+1, & \text{якщо } n=0, \\ A(n-1, 1), & \text{якщо } n \neq 0, m=0 \\ A(n-1, A(n, m-1)), & \text{якщо } n > 0, m > 0 \end{cases}$$

(це – так звана функція Акермана).

Використати програму, яка включає рекурсивну процедуру.

Вправа №459. Більшість задач, які поміщені в §10, де мова йде про вкладені цикли, можуть розв'язуватись з залученням процедур – внутрішні цикли можуть бути замінені зверненнями до необхідним чином визначеним процедурам. Наприклад, для розв'язку вправи 317 можна визначити процедуру обчислення a^n , для розв'язку вправи 318 – процедуру обчислення $\frac{1}{i^2+1} + \frac{1}{i^2+2} + \dots + \frac{1}{i^2+i+1}$ і т.д. Переглянути вправи 317 – 366 і сказати, які б процедури були б корисні для розв'язування цих вправ.

Вправа №460 *). Скласти процедуру обчислення значення цілого числа по заданому рядку символів, що є записом цього числа:

- а) в десятковій системі числення;
- б) в шістнадцятиричній системі числення (шістнадцятиричні цифри – це цифри від 0 до 9 та букви від A до F).

Вправа №461. Скласти процедуру побудови рядка символів, що є записом заданого дійсного числа в десятковій системі числення; рядок повинен містити вказану кількість цифр після коми.

Вправа №462. Скласти процедуру, результат роботи якої є символ, заданий при зверненні до процедури, – буква, невірне значення в іншому випадку.

Вправа №463. Скласти процедуру, результат роботи якої є символ, заданий при зверненні до процедури, якщо цей символ не є буквою, і відповідна рядкова (малою) буква в іншому випадку.

Вправа №464. Скласти процедуру “зжимання” кінцевої послідовності символів: кожна послідовність, яка складається з кількох входжень одного й того ж символу, замінюється на текст $x(k)$, де x – символ, а k – рядок, яка є записом числа входження символу x в початкову послідовність.

*) В цій та наступних вправах даного параграфу вимагається скласти окремі процедури, не включаючи їх в які-небудь програми. На практиці ці процедури можуть стати корисними в цілому ряді програм.

Вправа №465. Скласти процедуру, яка дозволить виявити позицію самого правого входження заданого символу в початковий рядок. Якщо рядок не містить символу, результатом роботи процедури повинно бути – 1.

Вправа №466. Скласти процедуру, яка замінює в початковому рядку символів всі одиниці на нулі і всі нулі на одиниці. Заміна повинна відбуватися, починаючи з заданої позиції рядка.

Вправа №467. Скласти процедуру, в результаті звернення до якої з першого заданого рядка видаляється кожен символ, який належить і другому заданого рядка.

Вправа №468. Скласти процедуру, яка дозволить виявити позицію самого правого входження в заданий рядок якого не будь символу з другого заданого рядка. Результатом роботи процедури повинна бути – 1, якщо перший рядок не містить жодного символу, який належить і другому заданому рядку.

Вправа № 469. Вирівнювання рядка полягає в тому, що між її окремими словами (див. Вправу 269) додатково вносяться проміжки так, щоб довжина рядка стала рівною заданій довжині (передбачається, що потрібна довжина не менша від початкової), а останнє слово рядка зрушилась до її правого краю. Скласти процедуру вирівнювання заданого рядка тексту.

Вправа № 470. При виводі тексту на екран або друкуючий пристрій часто використовуються табуляційні зупинки – виділені положення рядка. Наприклад, при друкуванні таблиць корисно зафіксувати положення стовпчиків таблиць. Якщо в початковому тексті зустрічається символ табуляції *tab* (наприклад, символ з кодом 9), це означає, що текст наступний за символом *tab*, повинен друкуватися з наступною табуляційної зупинки, а до неї потрібно додавати проміжки. Скласти процедуру друкування тексту з вказаною інтерпретацією символу *tab* (передбачить фіксований набір табуляційних зупинок).

§ 13. Файли

Вправа №471. ● Дано файл f , компонентами якого є дійсними числами. Знайти:

- а) суму компонент файла f ;
- б) добуток компонент файла f ;
- в) суму квадратів компонент файла f ;
- г) модуль суми і квадрат добутку компонент файла f ;
- д) останню компоненту файла.

Вправа №472. ● Дано файл f , компонентами якого є дійсними числами. Знайти:

- а) найбільше з значень компонент;
- б) найменше з значень компонент з парними номерами;
- в) найбільше з значень модулів компонент з непарними номерами;
- г) суму найбільшого і найменшого з значень компонент;
- д) різницю першої і останньої компонент файла.

Вправа №473. ● Дано файл f , компонентами якого є цілі числа. Знайти:

- а) кількість парних чисел серед компонент;
- б) кількість подвоєних непарних чисел серед компонент;
- в) кількість квадратів непарних чисел серед компонент.

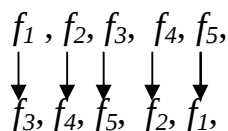
Вправа №474. ● Дано натуральне n . Записати в файл g цілі числа $b_1, \dots, b_n$ так, як вказано в вправах а) – д) вправи 139.

Вправа №475. ● Послідовність $x_1, x_2, \dots$ утворена по закону $x_i = \frac{i - 0.1}{i^3 + |\operatorname{tg} 2i|}$ ($i=1, 2, \dots$). Дано дійсне $\varepsilon > 0$. Записати в файл h члени послідовності $x_1, x_2, \dots$, зупинившись після першого члена, для якого виконано $|x_i| < \varepsilon$.

Вправа №476. ● Дано символьний файл f . Одержати копію файла в g .

Вправа №477. ● Дано символічні файли*) f_1 і f_2 . Переписати з збереженням порядку запису компоненти файла f_1 в файл f_2 , а компоненти файла f_2 в файл f_1 . Використати допоміжний файл h .

Вправа №478. ● Дано файли f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 , компонентами якого є дійсними числами. Організувати обмін компонентами між файлами у відповідності з наступною схемою:



тобто компоненти файла f_1 переписуються в файл f_3 , компоненти файла f_2 – в f_4 і т.д. Дозволяється використовувати один допоміжний файл h .

*) Файл, компонентами якого є символи, називається символьним файлом.

Вправа №479. ● Дано символний файл f . В файлі f не менше двох компонент. Визначити, чи є два перших символи цифрами. Якщо так, то встановити, чиє числа утворені цими цифрами парними.

Вправа №480. ● Дано файл f , компоненти якого є цілими числами. Одержати в файлі g всі компоненти файла

- а) що є парними числами;
- б) що діляться на 3 і не діляться на 7;
- в) є точними квадратами.

Вправа №481. ● Дано файл f , компоненти $u_0, u_1, \dots, u_n$ які є послідовними числами Фібоначчі (див. вправу 144). Одержати в файлі f послідовні числа Фібоначчі $u_0, u_1, \dots, u_{n+1}$.

Вправа №482. ● Дано символний файл f . Одержати файл g , з файла f заміною всіх його прописних (великих) букв однойменними рядковими (малими).

Вправа №483. Обрахувати по схемі Горнера значення многочлена з раціональними коефіцієнтами для даного раціонального значення змінної. Вважати, що чисельники і знаменники коефіцієнтів записані в файлі f : на початку чисельник і знаменник старшого коефіцієнта і т.д., в останню чергу чисельник і знаменник вільного члена.*)

Вправа №484. Дано файл f , компоненти якого є цілими числами. Записати в файл g всі парні числа файла f , а в файл h – всі непарні. Порядок запису чисел зберігається.

Вправа №485. Дано символний файл f . Записати в файл g компоненти файла f в зворотному порядку.

Вправа №486. Дано символні файли f і g . Записати в файл h спочатку всі компоненти файла f , потім – компоненти файла g з збереженням порядку.

Вправа №487. Дано файл f , компоненти якого є цілими числами. Одержати файл g , утворений з файла f виключенням повторних входжень одного й того ж числа.

Вправа №488. Дано файл f , компоненти якого є цілими числами. Жодна з компонент файла не дорівнює нулю. Файл f містить стільки ж додатних чисел скільки і від'ємних. Використовуючи допоміжний файл h , переписати компоненти файла f в файл g так, щоб в файлі g :

- а) не було двох сусідніх чисел з однаковим знаком;
- б) спочатку йшли позитивні елементи, а потім від'ємні;
- в) числа йшли в сліду чому порядку: два додатних, два від'ємних і т.д. (передбачається, що число компонентів в файлі f ділиться на 4)

*) В багатьох мовах програмування (наприклад, в Паскалі) компоненти можуть бути масивами. В цьому випадку можна передбачати, що чисельники і знаменники утворюють масив довжиною 2.

Вправа №489. ● Дано файл f , компоненти якого є цілими числами. Жодна з компонент файла f не дорівнює нулю. Числа в файлі йдуть в сліду чому порядку: десять додатних, десять від'ємних, десять додатних, десять від'ємних і т.д. Переписати компоненти файла f в файл g так, щоб в файлі g числа йшли в сліду чому порядку:

- а) п'ять додатних, п'ять від'ємних, п'ять додатних, п'ять від'ємних і т.д.
- б) двадцять додатних, двадцять від'ємних, двадцять додатних, двадцять від'ємних і т.д. (передбачається, що число компонентів в файлі f ділиться на 40.)

Вправа №490. Дано файл f , компоненти якого є цілими числами. Число компонентів файла ділиться на 100. Записати в файл g найбільші значення перших ста компонентів файла f , потім наступних сто компонентів і т.д.

Вправа №491. З умови попередньої вправи вилучається припущення про те, що число компонентів файла ділиться на 100. Якщо в останній групі виявиться менше ста компонент, то остання компонента файла g повинна бути рівною найбільшій з компонент файла f , що утворюють останню (неповну) групу.

Вправа №492. ● Дано символний файл f . Додати в його компоненти символи e, n, d (якщо це необхідно, використати додатковий файл g).

Вправа №493. ● Дано символний файл f .

- а) Підрахувати число входжень в файл сполучень ab .
- б) Визначити, чи входить в файл сполучення $abcdefgh$;
- в) Підрахувати число входження в файл кожної з букв a, b, c, d, e, f і вивести результат у вигляді таблиці

$$\begin{array}{ccc} a - N_a & b - N_b & c - N_c \\ d - N_d & e - N_e & f - N_f \end{array}$$

де $N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f$ – число входжень відповідної букви.

Вправа №494. Дано символні файли f і g . Визначити, чи співпадають компоненти файла f з компонентами файла g . Якщо ні, то одержати номер першої компоненти, в якій файл f і g різняться між собою. У випадку, коли один з файлів має компонент n ($n \geq 0$) і повторює початок другого (більш довгого) файла, то відповіддю повинно бути число $n+1$.

Вправа №495. Дано символні файли f і g . Записати в файл h всі початкові співпадаючі компоненти файлів f і g .

Вправа №496. Дано символний файл f . Записати в файл g з збереженням порядку запису ті символи файла f :

- а) яким в цьому файлі передуює буква a ;
- б) наступні за якими в цьому файлі йде буква a .

Вправа №497. Дано символний файл f . Групи символів, розділені проміжками (одним або кількома) і не мають проміжків всередині себе, будемо, як і раніше (див. вправу №269), називати словами. Вилучити з файла всі однобуквені слова і лишні проміжки. Результат записати в файл g .

Вправа №498. Дано символний файл f . Знайти найдовше слово серед слів, друга буква яких є e ; якщо слів з найбільшою довжиною кілька, то знайти останнє. Якщо таких слів не має взагалі, то повідомити про це. Розв'язати цю вправу:

- а) вважаючи, що слова складаються не більше ніж з 10 символів;
- б) без обмеження числа символів в слові.

Вправа №499. Дано символний файл f . Вважаючи, що кількість символів в слові не перевершує двадцяти:

- а) визначити скільки в файлі f мається слів, які складаються з одного, двох, трьох і т.д. символів;
- б) одержати гістограму (стовпчасту діаграму) довжин всіх слів файла f ;
- в) визначити кількість слів у файлі f .

Вправа №500. Дано символний файл f . Передбачається, що довжина одного слова не перевершує 10 і що число слів ділиться на 100. Підготувати файл для друку в дві колонки по п'ятдесят рядків на сторінці. Слова повинні бути поміщені в файлі f_1 в слідує чому порядку:

1-е слово, 51-е слово, 2-е слово, 52-е слово, ..., 50-е слово, 100-е слово, потім (наступна сторінка) 101-е слово, 151-е слово, ..., 150-е слово, 200-е слово і т.д.

Вправа №501. Дано символний файл f , який містить відомості про співробітників установи, записані по слідує чому зразку:

прізвище $\square$ ім'я $\square$ побатькові, прізвище $\square$ ім'я $\square$ побатькові, ... Записати ці відомості в файлі g , використовуючи зразки:

- а) ім'я $\square$ побатькові $\square$ прізвище, ім'я $\square$ побатькові $\square$ прізвище, ...
- б) прізвище $\square$ і.п., прізвище $\square$ і.п., ...

Вправа №502. Дано символний файл f , який містить більше 5000 слів. Слова в тексті розділені проміжками і розділовими знаками. Одержати 100 слів, які найбільш часто зустрічаються і число їх входжень в текст. Розв'язати вправу:

- а) без обмеження на довжину слів;
- б) передбачаючи, що любе слово тексту має не більш ніж 16 букв.

Вправа №503. Дано два символні файли f_1 і f_2 . Файл f_1 містить довільний текст. Слова в тексті розділені проміжками і розділовими знаками. Файл f_2 містить не більше 40 слів, які розділені комами. Ці слова утворюють пари: кожне перше слово вважається замінюваним, кожне друге слово – замінюючи. Знайти в файлі f_1 всі замінювані слова і замінити їх на відповідні замінюючи. Результат помістити в файл g .

Вправа №504. Пряма на площині задається рівнянням $ax+by+c=0$, де a і b одночасно не дорівнюють нулю. Будемо розглядати тільки прямі, для яких коефіцієнти a , b , c – цілі числа. Нехай f – файл, що містить коефіцієнти кількох прямих (не менше трьох). Переписати з файла f в файл g коефіцієнти тих прямих, які

- а) паралельні першій з прямих, заданих в файлі f ;
- б) вказані в а), але додатково необхідно, щоб всі прямі були різними;
- в) перетинають першу з прямих, заданих в файлі f ;
- г) вказані в в), але додатково необхідно, щоб серед прямих не було паралельних.

Вправа №505. Умова попередньої задачі зберігається. Необхідно одержати в файлі g коефіцієнти всіх різних прямих файла f .

Вправа №506. Багаж пасажирів характеризується кількістю речей і загальною вагою речей. Дан файл f , який містить інформацію про багаж кількох пасажирів, інформація про багаж окремого пасажирів являє собою відповідну пару чисел.

- а) Знайти багаж, середня маса однієї речі в якій відмінна не більше ніж на 0,3 кг від загальної маси речей.
- б) Знайти число пасажирів, які мають кількість речей яких перевищує середнє число речей.
- в) Визначити, чи є два пасажирів, багаж яких співпадають по числу речей і відмінні по масі не більше ніж на 0.5 кг.
- г) Встановити, чи є пасажирів, багаж яких перевищує багаж решти пасажирів і по числу речей, і по масі.
- д) Встановити, чи є пасажир, багаж якого складається з однієї речі масою не менше 30 кг.
- е) Дати відомості про багаж, число речей в якому не менше, ніж будь-якому іншому з цим же числом речей.

Вправа №507. Відомості про учня складаються з його імені і прізвища і назви класу (року навчання і букви), в якому він навчається. Дано файл f , який містить відомості про учнів школи.

- а) Встановити, чи є в школі учні з однаковим прізвищем.
- б) Встановити, чи є в паралельних класах учні з однаковим прізвищем.
- в) Встановити, чи є в класі учні з однаковим прізвищем.
- г) Відповісти на питання а) – в), але у відношенні учнів у яких співпадає і ім'я, і прізвище.
- д) Встановити, в яких класах нараховується більше 27 учнів.
- е) Встановити, на скільки чоловіку восьмих класах більше, ніж в десятих.
- ж) Зібрати в файлі g відомості про учнів 9-х і 10-х класів, помістивши на спочатку відомості про учнів 9а, потім 9б і т.д. потім 10а, 10б і т.д.
- з) Одержати список учнів даного класу по наступним зразках:
 прізвище $\sqcup$ ім'я
 прізвище $\sqcup$ і.
 і.прізвище.

Вправа №508. Дано файл f , який містить ті ж відомості про учнів школи, що і в попередній задачі, і додатково оцінки, одержані учнями в останній чверті.

- а) Встановити, скільки учнів не мають оцінок нижче чотирьох.
- б) Зібрати в файлі g відомості про кращих учнях школи, тобто про учнів, які не мають оцінки нижче чотирьох і по сумі балів не уступають учням свого і паралельних класів.

Вправа №509. Відомості про автомобіль складаються з його марки, номери і прізвища володаря. Дано файл f , який містить відомості про кілька автомобілів. Знайти:

- а) прізвище володарів і номери автомобілів даної марки;
- б) кількість автомобілів кожної марки.

Вправа №510. Дано файл f , який містить різні дати. Кожна дата – це число, місяць і рік. Знайти:

- а) рік з найменшим номером;
- б) всі весняні дати;
- в) саму пізню дату.

Вправа №511. Дано файл f , який містить відомості про книги. Відомість про кожну книжку – це прізвище автора, назви і рік видання.

- а) Знайти назву книжок даного автора, виданих з 1960 р.
- б) Визначити, чи є книжка з назвою “Інформатика”. Якщо так, то повідомити прізвище автора і рік видання. Якщо таких книг кілька, то повідомити відомості про всі ці книжки.

Вправа №512. Дано файл f_1 , який містить номери телефонів співробітників установи: вказується прізвище співробітника, його ініціали і номер телефону. Знайти телефон співробітника по його прізвищу та ініціалах.

Вправа №513. Дано файл f_1 , який містить відомості про кубики: розмір кожного кубика (довжина ребра в сантиметрах), його колір (червоний, жовтий, зелений або синій) та матеріал (дерев'яний, металевий, картонний). Знайти:

- а) кількість кубиків кожного з перерахованих кольорів та їх сумарний об'єм;
- б) кількість дерев'яних кубиків з ребром 3 см та кількість металевих кубиків з ребром, більшим 5 см.

Вправа №514. Дано файл f , який містить відомості про речовини: вказується назва речовини, її густина і провідність (провідник, напівпровідник, ізолятор).

- а) Знайти густину і назву всіх напівпровідників.
- б) Вибрати дані про провідники і впорядкувати їх по спаданню густини.

Вправа №515. Дано файл f , який містить відомості про експортовані товари: вказується найменування товару, країна, яка імпортує товар, і об'єм партії, що поставляється, в штуках. Знайти країни, в які експортується даний товар і загальний об'єм його експорту.

Вправа №516.

Дано два файли f_1 і f_2 . Файл f_1 – це інвентарний файл, що має дані про те, скільки виробів яких видів продукції зберігається на складі (вид продукції задається його порядковим номером). Файл f_2 – це допоміжний файл, що містить відомості про те, наскільки зменшилось чи збільшилось кількість виробів по деяким видам продукції. Допоміжний файл може вміщувати кілька повідомлень по продукції одного виду чи не містити ні одного такого повідомлення. Оновити інвентарний файл на основі допоміжного, створивши новий файл g .

Вправа №517. Дано файл f , який містить повідомлення про іграшки: вказується назва іграшки (наприклад, лялька, кубики, м'яч, конструктор і т.д.), її вартість в копійках і річні межі дітей, для яких дітей іграшка призначена (наприклад, для дітей від двох до п'яти років). Отримати наступні відомості:

- а) назву іграшок, ціна яких не перевищує 4 грн. і які підходять дітям 5 років;
- б) ціну самого дорогого конструктора, оформлену по прикладу ... грн. ... коп.;
- в) назву найбільш дорогих іграшок (ціна яких відрізняється від ціни самої дорогої іграшки не більше ніж на 1 грн.);
- г) назва іграшок, які підходять як дітям 4 років, так і дітям 10 років;
- д) ціни всіх кубиків, оформлений за прикладом, вказаному в б);
- е) чи можна підібрати іграшку, любу, крім м'яча, яка буде підходити дитині 3 років, і також м'яч так, щоб сумарна вартість іграшок не перевищувала 5 грн.?
- ж) чи є м'яч ціною 2 грн. 50 коп., призначений дітям від 3 до 8 років?; якщо ні, занести відомості про цю іграшку в файл f .

Вправа №518. Дано натуральне k , символічний файл f і текстовий файл f_1 *.

Файл f містить 30 слів (див. вправу 497), кожне з яких будемо називати кодовим. Сформувати файл g , який містить рядки файлу f_1 , циклічно зміщені так, щоб кожне кодове слово, яке входить в рядок, починалось з k -ї позиції. Рядки, які містять n кодових слів, записуються у файл g n раз.

Вправа №519. Дано текстовий файл f , який містить програму на мові Паскаль. Перевірити цю програму на невідповідність числа відкриваючих і закриваючих круглих дужок. Вважати, що кожний оператор програми:

- а) займає не більше однієї сторінки файлу f ;
- б) може займати довільне число рядків файлу f .

Вправа №520. Дано текстовий файл f . Отримати всі його рядки, які містять більше 60 символів.

Вправа №521. Дано текстовий файл f . Переписати у файл g всі компоненти файла f з заміною в них символу 0 на символ 1 і навпаки.

Вправа №522. Дано текстовий файл f . Отримати самий довший рядок файла. Якщо у файлі є кілька рядків з найдовшою довжиною, то отримати одну з них.

Вправа №523. Дано текстовий файл f . Записати в перевернутому виді рядки файл f у файл g . Порядок рядків у файлі повинен:

- а) співпадати з порядком кінцевих рядків у файлі f .
- б) бути зворотнім по відношенні до порядку рядків зворотного файла.

Вправа №524. Дано текстовий файл f . Переписати компоненти файла f у файл g , вставляючи в початок кожного рядка по одному пропуску. Порядок компонентів повинен бути збережений.

Вправа №525. Дано текстовий файл, рядок s . Отримати всі рядки файла f , який містить у вигляді фрагменту рядок s .

Вправа №526. Дано текстовий файл f . Не враховувати пропуски, які знаходяться в кінці його рядків. Результат помістити у файл f_1 .

Вправа №527. Дано два текстових файла f і g . Визначити, чи співпадають компоненти файла f з компонентами файла g . Якщо ні, то отримати номер першого рядка і позицію першого символу в цьому рядку, в яких файли f і g відрізняються між собою. Прийняти до уваги уточнення до вправи 494.

Вправа №528. Дано файл f , компонентами якого є натуральні числа. Кількість чисел у файлі кратне 4. Перші два числа із кожних чотирьох задають координати лівого верхнього кута прямокутника, наступні два числа – координати його правого нижнього кута. Побудувати прямокутники, задані у файлі f .

Вправа №529. Дано текстовий файл f . Кожен рядок файла містить кілька натуральних чисел в їх символічному представленні. Числа розділяються комами чи пропусками і визначають вид деяких геометричних фігур, її розміри і положення на екрані. Прийняти наступні умови:

- 1) відрізок прямої задається координатами своїх кінців, має номер 1;
- 2) прямокутник задається координатами лівого верхнього і правого нижнього кута, має номер 2;
- 3) коло задається координатами центра і радіусом, має номер 3;
- 4) крива задається кількістю її вершин, їх координатами і має номер 4.

Так, наприклад, 1, 10, 10, 30, 30 визначає відрізок прямої з координатами

кінців $(10, 10)$ і $(30, 30)$, а рядок 3, 100, 100, 50 – круг з центром в точці $(100, 100)$ і радіусом 50.

а) Побудувати на екрані всі геометричні фігури, задані у файлі f .

б) Розробити спосіб гадання більш широкого набору фігур у зрівнянні з вказаним і виконати пункт а).

Вправа №530. Дано файл f , компоненти якого є натуральними числами. Кожні дві послідовні компоненти визначають координати двох точок.

а) Вважаючи, що задані координати кінців відрізків, побудувати всі такі відрізки.

б) Вважаючи, що задано координати протилежних кутів прямокутника, побудувати всі такі прямокутники.

в) Вважаючи, що задані вершини A і B фігури, зображені на Рис.24, побудувати всі такі фігури.

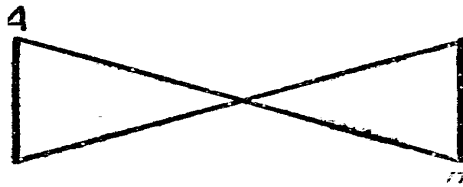


Рис. 24

г) Вважаючи, що задані координати центра круга і однієї з її точок, побудувати всі такі кола.

§ 14 Обчислення з збереженням послідовностей, число членів яких залежить від вхідних даних*

*) В деяких вправах програмування допускаються масиви з динамічними границями, і це знімає багато труднощів в розв'язанні задач; в цьому випадку даний параграф продовжує § 9. В паскалі ж, наприклад, де такі масиви недопустимі, природно користуватися списками. Можливий вигляд цих списків вказаний в вправах 531 – 534. Для роботи з списками корисні процедури вставки елементів в початок списку, вставки елементів в кінець списку, вилучення елемента і т.д. (ці процедури окремо розглянуті в § 36). Для розв'язання вправ цього параграфа можна використати і файли, але це різко збільшує час виконання програми і має сенс тільки в тому випадку, коли всі вхідні дані вміщуються в пам'яті обчислювальної машини.

Вправа №531. Дано натуральне число n , дійсні числа $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 2$). Отримати послідовність $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n$. Для рішення цієї задачі корисний список, зображений на Рис.25.

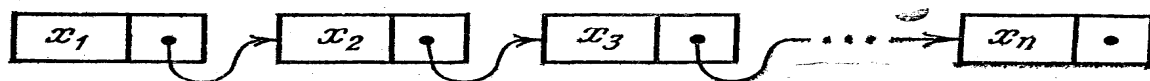


Рис. 25

Вправа №532. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Якщо послідовність $a_1, \dots, a_n$ впорядкований по неспаданню (тобто, якщо $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$), залишити її без змін. В іншому випадку отримати послідовність $a_n, \dots, a_1$. Для рішення цієї задачі корисний список, зображений на Рис.26.



Рис. 26

Вправа №533. Дано натуральне число, дійсні числа $x_1, \dots, x_n$. Обчислити:

- а) $x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \dots + x_n x_1$;
- б) $(x_1 + x_n)(x_2 + x_{n-1}) \dots (x_n + x_1)$;
- в) $(x_1 + x_2 + 2x_n)(x_2 + x_3 + 2x_{n-1}) \dots (x_{n-1} + x_n + 2x_2)$.

Для рішення цієї задачі корисний список, зображений на Рис.27.

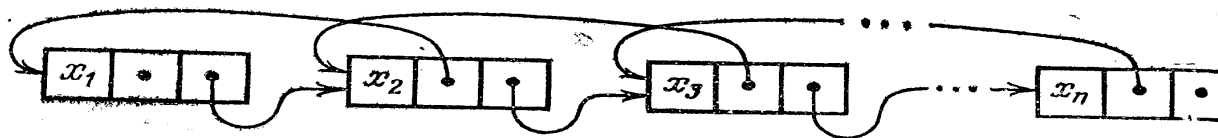


Рис. 27

Вправа №534. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_{2n}$.

Отримати:

- а) $(a_1 - a_{2n})(a_3 - a_{2n-2})(a_5 - a_{2n-4}) \dots (a_{2n-1} - a_2)$;
- б) $a_1 a_{2n} + a_2 a_{2n-1} + \dots + a_n a_{n+1}$;
- в) $\min(a_1 + a_{n+1}, a_2 + a_{n+2}, \dots, a_n + a_{2n})$;
- г) $\max(\min(a_1, a_{2n}), \min(a_2, a_{2n-1}), \dots, \min(a_n, a_{n+1}))$.

Вправа №535. Нехай. Дано натуральне m . Отримати a_m .

Вправа №536. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Встановити, чи існують серед чисел $a_1, \dots, a_n$ співпадаючі.

Вправа №537. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_{3n}$. Встановити, чи вірно, що для всіх $a_{2n+1}, \dots, a_{3n}$ існують рівні серед $a_1, \dots, a_{2n}$.

Вправа №538. Дано натуральне число n , дійсні числа $r_1, \dots, r_n$. Отримати послідовність:

- а) $r_1, \dots, r_n, r_1, \dots, r_n$.
- б) $r_1, \dots, r_n, r_n, \dots, r_1$.
- в) $r_n, \dots, r_1, r_1, \dots, r_n$.

Вправа №539. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Потрібно отримати послідовність $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$, де $x_1, \dots, x_m$ – взяті в порядку розміщення парні члени послідовності $a_1, \dots, a_n$, а

$y_1, \dots, y_l$ – непарні члени, $k = \min(m, l)$.

Вправа №540. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_{2n}$. Встановити, чи вірно, що для $i=1, \dots, n$ виконано:

- а) $a_i = -a_{n-i}$;
- б) $a_i = 2a_{n-i} + 2a_{n-i+1}$;
- в) $a_i + a_{2n-i+1} > 17$;
- г) $a_{2n-i+1} < a_i \leq a_{2n-i}$.

Вправа №541. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Перетворити послідовність $a_1, \dots, a_n$, розмістивши спочатку від'ємні члени, а потім – невід'ємні. При цьому:

- а) порядок як від'ємних так і невід'ємних чисел зберегти попереднім;
- б) порядок від'ємних чисел змінюється на зворотний, а порядок невід'ємних зберігається попереднім;
- в) порядок від'ємних зберігається попереднім, а порядок невід'ємних чисел змінюється на зворотний;
- г) порядок тих і інших чисел змінюється на зворотний.

Вправа №542. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Обчислити $\min_{1 \leq i \leq n} |a_i - \tilde{a}|$, де $\tilde{a}$ – середнє арифметичне чисел $a_1, \dots, a_n$.

Вправа №543. Дано натуральне число, дійсні числа $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. Послідовність $x_1, \dots, x_n$ і $p_1, \dots, p_n$ визначають систему n матеріальних точок на прямій: x_i – координати, p_i – маса i -ї точки ($i=1, \dots, n$). Вказати номер точки, найбільш близько розташованої до центру тяжіння системи. Якщо таких точок кілька, то взяти довільну з них.

Вправа №544. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Якщо в послідовності $a_1, \dots, a_n$ є хоча б один член, менший, ніж -3 , то всі від'ємні члени замінити їх квадратами, залишивши інші члени без змін; в іншому випадку помножити всі члени на 0.1 .

Вправа №545. “Лічилка”. Дано натуральні n, m . Вважається, що n людей стають в круг і отримують номери, рахуючи проти часової стрілки, $1, 2, \dots, n$. Потім, починаючи з першого, також проти часової стрілки відраховується m -а людина (оскільки люди стоять по колу, то за n -ю людиною стоїть перший). Ця людина виходить з колу, після чого, починаючи з наступного, знову відраховується m -а людина і так до тих пір, поки з усього колу не залишиться одна людина. Визначити його номер.

Для рішення цієї задачі корисний список, з'єднаний в кільце так, як показано на Рис. 28.

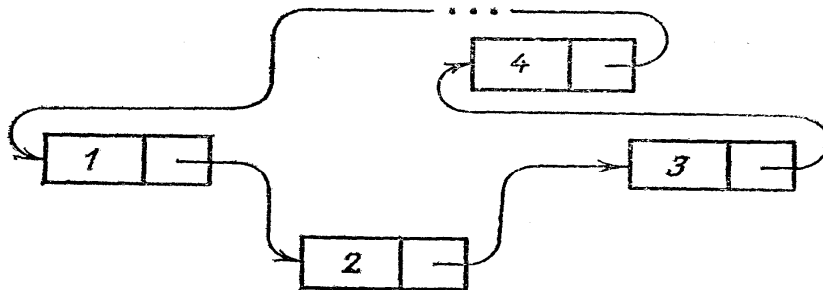


Рис. 28

Вправа №546. Дано натуральні числа n, m , символи $s_1, \dots, s_n$. ($m < n$). Отримати послідовність символів:

- а) $s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n, s_1, \dots, s_m$;
- б) $s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n, s_m, \dots, s_1$;
- в) $s_n, s_{n-1}, \dots, s_{m+1}, s_1, \dots, s_m$.

Вправа №547. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Відомо, що в послідовність $s_1, \dots, s_n$ входить один проміжок. Нехай m таке, що s_m – перший по порядку проміжок, який входить в $s_1, \dots, s_n$ (m заздалегідь невідоме). Виконати перетворення а), б), в) сформульоване в попередній задачі.

Вправа №548. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Отримати ті символи, які належать послідовності $s_1, \dots, s_n$, які входять в цю послідовність по одному разу.

Вправа №549. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Отримати послідовність символів, які містять лише останнє входження кожного символу з збереженням спільного збереженням порядку цих входжень.

Вправа №550. Дано натуральні числа k, m, n , символи $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_m, u_1, \dots, u_n$. Отримати по одному разу ті символи, які входять одночасно в усі три послідовності.

Вправа №551. Дано натуральне число n , символи $s_1, \dots, s_n$. Будемо розглядати слова, перетворених в послідовність $s_1, \dots, s_n$ символами (див. вправу 269). Нижче описуються перетворення, кожне з яких слід виконати при виконанні вказаної умови. Потім послідовність не залежить від того, чи була вона перетворена чи ні, повинна бути відредагована наступним чином. Повинні бути видалені групи проміжків, якими починається і закінчується послідовність, а кожна внутрішня група проміжків замінена одним проміжком.

Перетворення:

- а) якщо спільна кількість слів більше одиниці і непарне, то видалити перше слово;
- б) якщо останнє слово починається буквою a і спільне число слів більше одиниці, то переставити останнє слово в початок послідовності, відділивши його проміжком від s_1 ;
- в) якщо перше і останнє слова співпадають і спільне число слів більше одиниці, то видалити перше і останнє слова, а символи які залишилися переставити в зворотному порядку.

Вправа №552. Дано символи $s_1, s_2, \dots$. Відомо, що символ s_1 відмінний від точки і що серед $s_2, s_3, \dots$ є хоча би одна точка. Нехай $s_1, \dots, s_n$ – символи, попередні першій цифрі (n завчасно невідомо). Отримати:

- а) послідовність $s_n, s_{n-1}, \dots, s_1$;
- б) послідовність $s_1, s_3, \dots, s_n$, якщо n – непарне, послідовність $s_2, s_4, \dots, s_n$, якщо n – парне.

Вправа №553 Якщо потрібно зберігання послідовності, число членів якою обмежено зверху деяким відомим числом N , то можна використати для зберігання послідовності масив з N елементами, займаючи, таким чином, пам'ять обчислювальної машини з деяким запасом. Це дозволяє обійтись без списків.

- а) Повернутися до вправи 531, вважаючи, що $n \leq 1000$.
- б) Повернутися до вправи 532, вважаючи, що $n \leq 1500$.
- в) Повернутися до вправи 550, вважаючи, що $k \leq 1000, m \leq 1000, l \leq 100$.
- г) Повернутися до вправи 550, вважаючи, що $k + m + l \leq 2000$.

Потрібно мати на увазі, що якщо використовувати кілька таких масивів, то сумарний надлишок зайнятої пам'яті може виявитися дуже великою для того, щоб можна було використати цей прийом.

§ 15. Цілі числа

Вправа №554. Дано натуральне число n . Одержати всі Піфагорові трійки натуральних чисел, кожне з яких не перевершує n , тобто всі такі трійки натуральних чисел a, b, c , що $a^2 + b^2 = c^2$ ($a \leq b \leq c \leq n$).

Вправа №555. ● ● ● Трикутником Паскаля називається числовий трикутник

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
 \end{array}$$

в якому по краях стоять одиниці, а кожне число всередині дорівнює сумі двох, що стоять над ним в найближчому рядку зверху.

Дано натуральне число n . Одержати перші n рядків трикутника Паскаля.

Вправа №556. Для чисел Фібоначчі $u_0, u_1, \dots$ (див. вправу 144) справедлива формула Біне

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k, \quad k=0, 1, \dots$$

Так як $\left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$, то для великих k виконується наближена рівність

$$u_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Обчислити та округлити до цілого всі числа $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k$ ($k=0, 1, \dots, 15$).

Обчислити $u_0, u_1, \dots, u_{15}$ по формулам $u_0=0$; $u_1=1$; $u_k=u_{k-1}+u_{k-2}$ ($k=2, 3, \dots$) і порівняти результати.

Вправа №557. Дано натуральне число n ($n \geq 2$). Знайти всі менші n прості числа, використовуючи решето Ератосфена.

Вправа №558. Дано натуральне число n . При допомозі решета Ератосфена знайти четвірки менших n простих чисел, які належать одному десятку наприклад, 11, 13, 17, 19).

Вправа №559. Дано натуральне число n . Знайти всі менші n числа Мерсена. (Просте число називається числом Мерсена, якщо воно може бути представлене у вигляді $2^p - 1$, де p теж просте число).

Вправа №560. ● ● ● Два натуральних числа називаються дружніми, якщо кожне з них дорівнює сумі всіх дільників іншого, крім самого цього числа. Знати всі пари чисел, які лежать в діапазоні від 200 до 300.

Вправа №561. ● ● ● Дано натуральне число n . Серед чисел $1, \dots, n$ знайти всі такі, запис яких співпадає з останніми цифрами запису їх квадрата (як, наприклад, $6^2=36$, $25^2=625$ і т.д.).

Вправа №562. Натуральне число з n цифр є числом Армстронга, якщо сума його цифр, піднесена до n -го степеня, дорівнює самому числу (як, наприклад, $153=1^3+5^3+3^3$). Одержати всі числа Армстронга, які мають дві, три і чотири цифри.

Вправа №563. Назвемо натуральне число паліндромом, якщо його запис читається однаково з початку і з кінця (як, наприклад, 4884, 393, 1)

а) знайти всі менші 100 натуральних числа, які при піднесенні в квадрат дають паліндром.

б) знайти всі менші 100 числа – паліндроми, які при піднесенні до квадрату також дають паліндроми.

Вправа №564. Розглянемо деяке натуральне число n . Якщо це не паліндром, то змінимо порядок його цифр на зворотний і складемо це число з даним. Якщо сума – не паліндром, то над нею повторюються ті ж дії і т.д., поки не одержиться паліндром. До даного часу невідомо, чи завершиться цей процес для довільного натурального n .

Дано натуральні числа k, l, m ($k \leq l$). Перевірити чи вірно, що для довільного натурального числа з діапазону від k до l процес завершується не пізніше m таких дій.

Вправа №565. Розглянемо деяке натуральне число n ($n > 1$). Якщо воно парне, то поділити його на 2, інакше помножити на 3 і додати 1. Якщо одержане число не дорівнює 1, то повторюємо ті ж дії і т.д., поки не одержиться 1. До даного часу невідомо, чи завершиться цей процес для довільного натурального $n > 1$.

Дано натуральні числа k, l, m ($k \leq l$). Перевірити чи вірно, що для довільного натурального числа з діапазону від k до l процес завершується не пізніше m таких дій.

Вправа №566. Знайти всі прості нескорочувані дроби, які заключні між 0 і 1, знаменники яких не перевершують 7 (дріб задається двома натуральними числами – чисельником і знаменником).

Вправа №567. Дано натуральне число n . Встановити, чи можна представити $n!$ у вигляді добутку трьох послідовних цілих чисел.

Вправа №568. Дано натуральне число m . Вставити між деякими цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, записаними в такому порядку, знаки +, – так, щоб значенням одержаного виразу було число m . Наприклад, якщо $m=122$, то підійде наступна розстановка знаків $12+34-5-6-+78+9$. Якщо необхідна розстановка неможл

права №569. ● ● ива, то повідомити про це.

Дано натуральне число n . Одержати в порядку зростання n перших натуральних чисел, які не діляться ні на які прості числа крім 2, 3 і 5.

Вправа №570. Алгоритм Евкліда (див. вправу 89) допускає багаточисельні узагальнення. Наприклад, разом з НСД (f, g) можна вирахувати цілі u і v такі, що $fu+gv=\text{НСД}(f, g)$. Це дає можливість знаходити деякі цілочисельні розв'язки рівняння виду $kx+ly=m$, де k, l, m – цілі числа такі, що k і l одночасно не рівні 0, а m ділиться на $d = \text{НСД}(|k|, |l|)$. Нехай $|k|u + |l|v = d$; тоді $|k|um/d + |l|vm/d = m$, і як наслідок цього, $k(c_1um/d) + l(c_2vm/d) = m$ де $c_j = \pm 1$ ($j=1, 2$). Вкажемо алгоритм знаходження цілих чисел u і v , що задовольняють $fu+gv=\text{НСД}(f, g)$. Позначимо тимчасово f через f_0 і g через f_1 . Одержувані в процесі примінення алгоритму Евкліда ненульові залишки позначимо через $f_2, f_3, \dots, f_n$, частки від ділення f_0 на f_1, f_1 на $f_2, \dots, f_{n-1}$ на f_n – через $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\begin{aligned} f_0 &= a_1 f_1 + f_2, \\ f_1 &= a_2 f_2 + f_3, \\ &\dots\dots\dots \\ f_{n-2} &= a_{n-1} f_{n-1} + f_n, \\ f_{n-1} &= a_n f_n; \end{aligned}$$

тут $\text{НСД}(f_0, f_1) = f_n$. Нехай для деякого $i \leq n-2$ разом з числами f_i, f_{i+1} відомі відповідні їм співмножники p, q, s, t такі, що $f_0 p + f_1 q = f_i, f_0 s + f_1 t =$. Тоді, поділивши f_i на f_{i+1} і одержавши частку таке a_{i+1} і залишок f_{i+2} , ми можемо обчислити співмножники, які відповідають f_{i+2} : так як $f_i - a_{i+1} f_{i+1} = f_{i+2}$, то $f_0(p - a_{i+1} s) + f_1(q - a_{i+1} t) = f_{i+2}$.

Таким чином, для знаходження цілих u і v таких, що $fu+gv=\text{НСД}(f, g)$, треба застосовувати до f і g алгоритм Евкліда, розглядаючи на кожному кроці його примінення, крім тих двох чисел, які розглядались і раніше, ще і відповідні цим числам співмножники p, q і s, t . На першому кроці в якості співмножників, що відповідають вихідним числам f і g беруться 1, 0 і 0, 1. виконавши ділення і одержавши частку a і деякий залишок, необхідно, якщо залишок не рівний 0, обрахувати його по формулах $p-as, q-at$, співмножники, які відповідають одержаному залишку. Співмножники, які відповідають останньому ненульовому залишку, дадуть розв'язок рівняння, яке розглядаємо $fu+gv=\text{НСД}(f, g)$.

а) Дано одночасно не рівні 0 цілі f і g . Знайти $\text{НСД}(|f|, |g|)$ і цілі u і v такі, що $fu+gv=\text{НСД}(|f|, |g|)$.

б) Дані цілі k, l, m такі, що k і l одночасно не рівні 0, а m ділиться на $\text{НСД}(|k|, |l|)$. Знайти який-небудь цілочисельний розв'язок рівняння $kx+ly=m$.

в) Відмітимо, що запропонований вище алгоритм пошуку множників u і v можна змінити так, що число необхідних їм операцій скоротиться майже в

півтора рази: з двох чисел u і v досить вирахувати замість $НСД(f,g)$ тільки v , а потім визначити u по формулі $u=(НСД(f,g)-gv)/f$. Внести це удосконалення в програми, які дають розв'язки завдань а), б).

Вправа №571. Показати, що якщо x_1, y_1 і x_2, y_2 – два цілочисельних розв'язки рівняння $kx+ly=m$, то x_1-x_2, y_1-y_2 цілочисельний розв'язок рівняння $kx+ly=0$. Вивести сюди, що якщо $\bar{x}, \bar{y}$ який-небудь цілочисельний розв'язок рівняння $kx+ly=m$, то всі цілочисельні розв'язки цього рівняння описуються формулами $x=\bar{x}+l't, y=\bar{y}-k't$, де $k'=k/НСД(k,l)$ $l'=l/НСД(k,l)$ ($t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Написати програму, яка дозволить перевірити, чи має рівняння $kx+ly=m$ розв'язок у цілих невід'ємних числах, і якщо має, то дозволяє побудувати якесь одне таке рішення.

Вправа №572. Дано натуральне число k , одночасно не рівні 0 цілі числа $n_1, \dots, n_k$. Знайти $НСД(|n_1|, \dots, |n_k|)$ і цілі $u_1, \dots, u_k$ такі, що $n_1 u_1 + \dots + u_k n_k = НСД(|n_1|, \dots, |n_k|)$ (див. вправу 333).

Вправа №573. Дано натуральні взаємно прості числа n, p . Використовуючи алгоритм, описаний в вправі 570а, знайти натуральне m таке, щоб по-перше $m < p$ і, по-друге – nm при діленні на p дає залишок 1.

Вправа №574. Відома в теорії чисел китайська теорема про залишки стверджує наступне. Нехай $p_1, \dots, p_r$ попарно взаємно прості натуральні числа; нехай $v = p_1 \dots p_r$. Нехай $a_1, \dots, a_r$ – такі цілі невід'ємні числа, що $a_1 < p_1, \dots, a_r < p_r$. Тоді існує рівно одне ціле невід'ємне $u < v$, які при діленні на p_1 дає залишок a_1 , при діленні на p_2 дає залишок a_2 , ... при діленні на p_r дає залишок a_r . (Процес відновлення чисел по його залишкам був відомий в Китаї вже біля 2000 років тому, тому теорема має таку назву). Якщо дані $p_1, \dots, p_r, a_1, \dots, a_r$, то на основі цієї теореми число може бути знайдене послідовною перевіркою чисел $0, 1, \dots, v-1$. Проте є алгоритм значно швидшого розв'язку цієї задачі, який ми сформулюємо без доведення (маєте спробувати самостійно знайти доведення)

Позначимо через v_i ($1 \leq i \leq r$) добуток всіх $p_1, \dots, p_r$ крім тобто $v_i = p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r = v / p_i$. Нехай числа w_i ($1 \leq i \leq r$) такі, що $1 \leq w_i < p_i$ при діленні на p_i дає залишок 1 (див. попередню вправу). Тоді можна покласти, що u дорівнює залишку від ділення $v_1 w_1 a_1 + \dots + v_r w_r a_r$ на v . Наприклад, якщо p_1, p_2, p_3, p_4 рівні відповідно 2, 3, 5, 7, а a_1, a_2, a_3, a_4 рівні відповідно 1, 2, 4, 3, то одержиться $u=59$. перевірка показує, що u задовольняє умові задачі: $59 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $59 = 2 \cdot 29 + 1 = 3 \cdot 19 + 2 = 5 \cdot 11 + 4 = 7 \cdot 8 + 3$.

Дано натуральні числа $r, p_1, \dots, p_r$, цілі невід'ємні числа $a_1, \dots, a_r$ ($p_1, \dots, p_r$ – попарно взаємно прості, $a_1 < p_1, \dots, a_r < p_r$). Знайти u , що задовольняє сформульованим вище умовам.

Вправа №575. Ланцюговим дробом (кінцевим) називають вираз

$$\frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots \frac{1}{b_k}}}}$$

де $b_1, \dots, b_k$ – натуральні числа. Для ланцюгового дробу такого вигляду використовують короткий запис $[b_1, \dots, b_k]$. Кожне додатне, менше одиниці раціональне число s/t можна представити ланцюговим дробом. Нехай s, t – натуральні числа ($s < t$). Після ділення t на s з залишком одержується, що $t = as + r$ ($a > 0, 0 \leq r < s$) звідки

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{t/s} = \frac{1}{a + r/s}.$$

Покладемо, що $b_1 = a$, потім цим же способом перетворимо r/s і одержуємо b_2 і т.д. Видно, що $b_1, \dots, b_k$ – це послідовність частки, які виникають в процесі примінення до s і t алгоритму Евкліда (див. вправу 89). І так, нехай $s/t = [b_1, \dots, b_k]$. Додатково розглянемо ланцюгові дроби $[b_1], [b_1, b_2], \dots, [b_1, \dots, b_{k-1}]$, значення яких називаються підходящими дробами числа s/t . Позначимо деякі форми підходящих дробів через $p_1/q_1, \dots, p_{k-1}/q_{k-1}$. Підходящі дроби володіють наступними важливими властивостями:

$$1) \left| \frac{s}{t} - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{q_i^2}, \quad i = 1, \dots, k-1;$$

$$2) \text{ якщо для деякого дробу } u/v \text{ і підходящого дробу } p_i/q_i \quad (1 \leq i < k-$$

1) виконано

$$\left| \frac{s}{t} - \frac{u}{v} \right| < \left| \frac{s}{t} - \frac{p_i}{q_i} \right|,$$

то $v > q_i$.

Властивості 1), 2) використовуються в різноманітних практичних вправах, які вимагають підбору для даного раціонального числа доброго наближення у вигляді дробу з порівняно невеликим знаменником. Прикладом може бути вправа розрахунку зубчатої передачі, яка складається з двох шестерень. Передаточне число повинно бути близьке до заданого значення, і при цьому число зубців кожної з шестерінок не може перевершувати деякої вказаної межі. Для розв'язування такого роду задач корисні наступні співвідношення для чисельників і знаменників підходящих дробів:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1; p_2 = b_2; p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2}, & n &= 3, 4, \dots, k-1 \\ q_1 &= b_1; q_2 = b_1 b_2 + 1; q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2}, & n &= 3, 4, \dots, k-1^*). \end{aligned}$$

*) Доведення цих співвідношень і властивостей 1), 2) можна знайти, наприклад, в книзі Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978.

Написати програми виконання наступних завдань.

Дано натуральні s, t ($s < t$).

а) Одержати всі підходящі дроби числа s/t (вказати їх чисельники і знаменники).

б) Вважаючи, що додатково задано натуральне k , встановити, чи існують такі підходящі дроби числа s/t , чисельники і знаменники яких менші k . Якщо такі підходящі дроби існують, то побудувати останню по порядку (вказати чисельник і знаменник) а також вказати модуль різниці числа r/s і знайденого підходящого дроби.

Вправа №576. Дано натуральні числа $a_1, \dots, a_{10}$. Нехай, маємо 10 гир масою $a_1, \dots, a_{10}$. Позначимо через c_k число способів, якими можна скласти масу k , тобто c_k – це число розв'язків рівняння $a_1x_1 + \dots + a_{10}x_{10} = k$, де може приймати значення 0 або 1 ($i=1, \dots, 10$). Одержати $c_0, \dots, c_{10}$.

Вправа №577. Дано натуральні числа $a_1, \dots, a_{10}$. Нехай, маємо 10 видів монет номіналом $a_1, \dots, a_{10}$. Позначимо через b_k число способів, якими можна виплатити суму k , тобто b_k – це число розв'язків рівняння $a_1x_1 + \dots + a_{10}x_{10} = k$, де може приймати цілі невід'ємні значення. Одержати $b_0, \dots, b_{20}$.

Вправа №578. Дано натуральне число n . Як найменшою кількістю монет можна виплатити n копійок? Передбачається, що в достатньо великій кількості маються монети номіналом 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 і 50 коп.

Вправа №579. Дано натуральне число n ($n > 5$). Одержати всі п'ятірки натуральних чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 такі, що $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5$ і $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$.

Вправа №580. Дано натуральне число n ($n \leq 99$). Одержати всі способи виплати суми n при допомозі монет номіналом 1, 5, 10 і 20 коп.

§16. Системи числення.

Вправа №581. Одержати послідовність $d_k, d_{k-1}, \dots, d_0$ десяткових цифр числа 2^{200} , тобто одержати таку цілочисельну послідовність, в якій кожен d_i , що задовольняє умові $0 \leq d_i \leq 9$ і, додатково, $d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + d_0 = 2^{200}$.

Вправа №582. Одержати послідовність $d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-k}$ десяткових цифр числа 2^{-200} , тобто одержати таку цілочисельну послідовність, в якій кожен d_i , що задовольняє умові $0 \leq d_i \leq 9$ і, додатково, $d_{-1} \cdot 10^{-1} + d_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots + d_{-k} = 2^{-200}$.

Вправа №583. Одержати послідовність $d_k, d_{k-1}, \dots, d_0$ десяткових цифр числа $100!$, тобто одержати таку цілочисельну послідовність, в якій кожен d_i , що задовольняє умові $0 \leq d_i \leq 9$ і, додатково, $d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + d_0 = 100!$.

Вправа №584. Одержати послідовність $d_k, d_{k-1}, \dots, d_0$ десяткових цифр числа:

а) $100! + 2^{100}$;

б) $100! - 2^{100}$,

тобто одержати таку цілочисельну послідовність, в якій кожен d_i , що задовольняє умові $0 \leq d_i \leq 9$ і, додатково, $d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + d_0$ дорівнює $100! + 2^{100}$ або відповідно $100! - 2^{100}$.

Вправа №585. Дано натуральне число p . Одержати двійкове представлення числа p у вигляді послідовності $a_0, \dots, a_n$ нулів і одиниць такої, що $p = a_n 2^n + \dots + a_1 2 + a_0$ ($a_n \neq 0$).

Вправа №586. Дано натуральні числа p, q ($q \geq 2$). Одержати q -представлення числа p у вигляді такої послідовності $a_0, \dots, a_n$ цілих невід'ємних чисел, що $a_i < q$ ($i = 0, \dots, n$) і $p = a_n q^n + \dots + a_1 q + a_0$ ($a_n \neq 0$).

Вправа №587. Дано дійсне число x , натуральне число q ($0 \leq x < 1, q \geq 2$). Одержати п'ять цифр q -представлення числа x , тобто одержати послідовність цілих невід'ємних $a_{-1}, \dots, a_{-5}$ таку, що $x = a_{-1} q^{-1} + \dots + a_{-5} q^{-5} + r$, $0 \leq a_i x \leq q - 1, r < q^{-5}$.

Вправа №588. Дано натуральне число p . Одержати послідовність $a_0, \dots, a_n$, кожен член якої дорівнює $-1, 0$ або 1 , таку, що $p = a_n \cdot 3 + \dots + a_1 \cdot 3 + a_0$ ($a_n \neq 0$).

Вправа №589. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$ такі, що кожне a_i дорівнює нулю або одиниці і $a_n \neq 0$. Послідовність $a_1, \dots, a_n$ задає війкове представлення деякого цілого числа $p = a_n \cdot 2^n + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$. Одержати послідовність нулів і одиниць, що задають двійкове представлення:

а) числа $p + 1$;

б) числа $p - 1$;

в) число $3p$.

Вправа №590. Одержати всі менші 10^6 натуральні числа, які є паліндромами (див. вправу 563) як в десятковій системі так і в двійковій системах.

Вправа №591. Дано натуральне число m . Знайти таке натуральне число n , що двійковий запис n одержується з двійкового запису m при зміні порядку цифр на зворотній (m задана в десятковій системі, і n треба також одержати в десятковій системі, наприклад $m = 3$ одержується $n = 3$).

Вправа №592. Дано натуральне число n . Необхідно одержати послідовність, яка складається з нулів та семірок і утворюють десятковий запис деякого натурального числа, яке ділиться на n .

Скористатись тим, що в числовій послідовності $7, 77, 777, \dots$ обов'язково знайдуться два члени, які при діленні на n дають один і той же залишок.

Вправа №593. Дано натуральне число m ($m < 27$). Одержати всі тризначні натуральні числа, сума цифр якого дорівнює m .

Вправа №594. Одержати всі шестизначні щасливі номери. (Про ціле число n , що задовольняє умову $0 \leq n \leq 999999$, говорять, що воно представляє собою щасливий номер, якщо сума трьох його перших цифр дорівнює сумі трьох його останніх цифр; якщо в числі менше шести цифр, то недостаючі початкові цифри вважаються нулями).

Вправа №595. Дано взаємно прості натуральні числа p, q ($p > q$). Знайти періодичну і неперіодичну частини (дві послідовності однозначних невід'ємних чисел, розділених числом -1 десяткового дробу, рівної p/q).

Вправа №596. Одержати всі чотиризначні натуральні числа в запису яких немає двох однакових цифр.

Вправа №597. Дано натуральні числа n, m , невід'ємні цілі числа $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$ такі, що $a_m a_{m-1} \dots a_0$ – запис n в деякій системі числення (серед $a_m a_{m-1} \dots a_0$ можуть бути і числа, більше дев'яти, – це буде означати, що основа системи числення зарані більше десяти). Необхідно визначити основу використовуваної системи числення.

Вправа №598. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$ ($a_i \neq 0$, $i=1, \dots, n$). Знаки чисел в кожній з трійок a_i, a_{i+1}, a_{i+2} ($i=1, \dots, n-2$) можуть утворювати одну з наступних комбінацій: $+++$, $++-$, $+-+$, $+--$, $-++$, $-+-$, $--+$, $---$. Одержати ціле $b_0, \dots, b_7$, що рівні кількості входжень в послідовність $a_1, \dots, a_n$ вказаних трійок a_i, a_{i+1}, a_{i+2} , з тією чи іншою комбінацією знаків.

Вправа №599. В послідовності дійсних чисел $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ вибрати послідовність $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ ($0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 10$), для якої значення $\sin(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k})$ є найбільшим. (перебрати всі підпослідовності даної послідовності шляхом розгляду всіх послідовностей $b_0, \dots, b_{10}$ з нулів та одиниць: a_i входить в послідовність, якщо $b_i=1$. Використати розв'язок вправи 589 а.)

Вправа №600. Дано натуральне число n ; представити його в двійково-десятковій системі числення. Останнє означає, що треба одержати послідовність війкових цифр – нулів і одиниць; при цьому перші чотири війкові цифри дають запис (у вигляді війкового числа) першої (старшої) десяткової числа n , наступні чотири війкові цифри – запис другої десяткової цифри числа n і т.д. Таким чином, загальне число війкових цифр повинно ділитись на 4. Приклади: якщо $n=93$, то двійково-десяткова запис n є 10010011; якщо $n=607$, то – 011000000111 і т.д.

Вправа №601. Дано натуральне число m , війкові цифри $b_1, \dots, b_m$ як запис деякого натурального n в двійково-десятковій системі числення (див. попередню вправу), знайти натуральне n в десятковій системі.

Вправа №602. Довести, що довільне натуральне число n можна єдиним способом представити при допомозі деяких цілих невід'ємних $d_0, \dots, d_s$ у вигляді $d_s(s+1)! + d_{s-1}s! + \dots + d_12! + d_0$ при умові, що $0 \leq d_i \leq i+1, i=0, \dots, s, d_s \neq 0$.

Дано натуральне число n ; знайти відповідні $d_s, d_{s-1}, \dots, d_0$.

Вправа №603. В якості основи позиційної системи числення може бути взято від'ємне ціле число. Наприклад, можна розглянути систему з основою -10 . Довільне ціле n єдиним чином представляється у вигляді суми $a_s(-10)^s + a_{s-1}(-10)^{s-1} + \dots + a_1(-10) + a_0$ де $0 \leq a_i \leq 9, i=0, \dots, s$. З сказаного витікає, що довільне n записується в системі з основою -10 у вигляді цілого без знака $a_s a_{s-1} \dots a_0$.

Дано ціле число n . Побудувати представлення n в системі з основою -10 , тобто знайти відповідну $a_s a_{s-1} \dots a_0$.

Вправа №604. Розглянемо послідовність натуральних чисел $w_0, w_1, \dots$, утворену по такому закону: $w_0=1, w_1=2, w_k = w_{k-1} + w_{k-2} (k=2, 3, \dots)$. Це послідовність – зсунута послідовність чисел Фібоначчі (див. вправу 144) $w_0=u_2, w_1=u_3, w_2=u_4$. Послідовність $w_0, w_1, \dots$ – це $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$. Довести, що любе натуральне число n можна єдиним способом представити при допомозі деяких невід'ємних цілих $b_0, \dots, b_t$ у вигляді $b_t w_t + b_{t-1} w_{t-1} + \dots + b_0 w_0$ при умові, що $0 \leq b_i \leq 1, i=0, \dots, t, b_t \neq 0$. При цьому дві одиниці не можуть стояти поруч: якщо $b_i=1$, то $b_{i+1}=0 (i=0, \dots, t-2)$.

Дано ціле невід'ємне число n ; знайти відповідні $b_t, b_{t-1}, \dots, b_0$.

Вправа №605. “Римські цифри”

- Перевірити, чи правильна запис числа римськими числами.
- Записати дане ціле число з діапазону від 1 до 1999 римськими цифрами.
- Перевести число, записане римськими цифрами, в десяткову систему.

§ 17. Геометрія

Вправа №606. Дано дійсні додатні числа a, b, c, d . З'ясувати, чи можна побудувати чотирикутник з такими довжинами сторін.

Вправа №607. Дано дійсне число φ ($0 < \varphi < \pi$). Із точки $(1,1)$ під кутом φ до прямої $x=1$ випущено світловий промінь (Рис. 29, а–29, б)

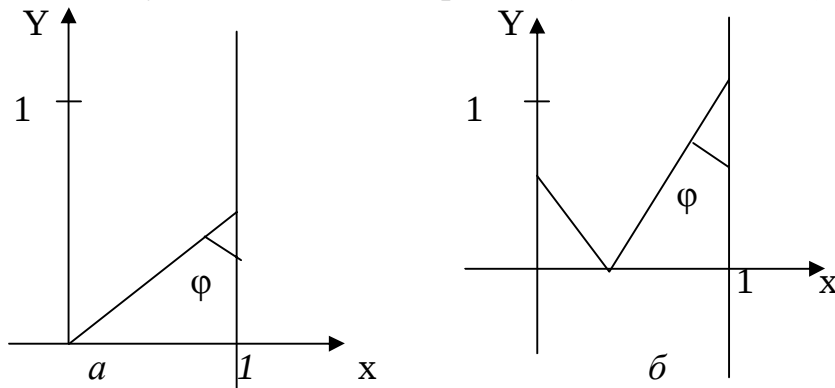


Рис. 29

Знайти точку вісі ординат, в якій промінь падає на цю вісь. Якщо $\varphi < \pi/4$, то промінь спочатку відобразиться по закону “кут падіння дорівнює куту відбивання” від вісі абсцис.

Вправа №608. Дано дійсні числа x_1, y_1, x_2, y_2 ($x_1 \neq x_2$), які визначають дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. На вісі абсцис знайти таку точку, сума відстаней від якої до точок A і B – найменша для всіх точок цієї вісі.

Вправа №609. Дано дійсні числа x, y . Визначити відстань від точки площини з координатами (x, y) до границі квадрата *) з вершинами:

- а) $(-0.5, -0.5), (-0.5, 0.5), (0.5, 0.5), (0.5, -0.5)$;
- б) $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$.

Вправа №610. Дано натуральне число n . Цілі числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Відомо, що точки $p_1, \dots, p_n$ з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ попарно різні. Нехай точка p_i віддалена від початку координат на відстань r_i ($i = 1, \dots, n$). Нехай $R = \max(r_1, \dots, r_n)$.

а) Серед точок $p_1, \dots, p_n$ вибрати яку-небудь одну p_i , для якої $r_i = R$; вказати координати вибраної точки і відстань від цієї точки до початку координат.

б) Серед точок $p_i (1 \leq i \leq n)$, для яких $r_i = R$, вибрати ті, які мають найменшу абсцису. Якщо таких точок більше одної, то вибрати з них точку, яка має найбільшу ординату. Вказати номер вибраної точки.

Вправа №611. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{50}$. Ці числа визначають 25 інтервалів числової осі: $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{49}, a_{50})$.

а) Чи мають всі данні інтервали спільні точки? Якщо так, то вказати яку-небудь з цих точок.

*) Тобто мінімум відстаней від даної точки до точок границі квадрата

б) Чи є інтервалом об'єднання даних інтервалів? Якщо так, то вказати кінці цього інтервалу.

в) Вказати число i ($1 \leq i \leq 25$) таке, що об'єднання даних інтервалів можна уявити у виді i інтервалів, що не перетинаються.

г) Чи є точки числової вісі, які належать принаймні трьом яким-небудь із даних інтервалів? Якщо так, то вказати яку-небудь з цих точок.

Вправа №612. Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_{15}, y_1, \dots, y_{15}, r_1, \dots, r_{15}$. Дізнатися, чи є на площині точка, яка належить всім кругам $C_1, \dots, C_{15}$, де C_i має центр з координатами x_i, y_i і радіус r_i ($i = 1, \dots, 15$).

Вправа №613. Дано дійсні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{15}, y_{15}$, які розглядаються, як координати $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{15}, y_{15})$ точок на площині. Дізнатися, чи вірно, що для кожної з цих п'ятнадцяти точок знайдеться друга, така, що всі тринадцять точок, які залишилися лежать по одну сторону від прямої, яка проходить через ці дві точки.

Вправа №614. Дано цілі числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Дізнатися чи знайдуться серед точок з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ чотири такі, які є вершинами квадрата.

Вправа №615. Дано цілі числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Відомо, що точки з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ є трьома вершинами деякого прямокутника. Знайти координати четвертої вершини.

Вправа №616. Пряма на площині може бути задана рівнянням $ax+by+c=0$, де a і b одночасно не дорівнюють нулю. Будемо розглядати прямі тільки з цілими коефіцієнтами a, b, c . Нехай дані коефіцієнти кількох прямих: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$.

а) Визначити, чи є серед цих прямих співпадаючі чи паралельні.

б) Визначити, чи є три прямі, які перетинаються в одній точці.

в) Визначити, чи знаходяться дані прямі в спільному положенні. (Прямі знаходяться в спільному положенні, якщо всі вони різні, ніякі дві з них не паралельні і ніякі три не перетинаються в одній точці.)

Вправа №617. Окружність на площині може бути задана координатами x, y її центра і радіусом r . Нехай дано відповідні характеристики кількох окружностей:

$$x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, \dots, x_n, y_n, r_n.$$

а) Визначити, чи є серед цих окружностей три попарно, що перетинаються.

б) Знайти серед цих окружностей всі відокремлені окружності, т. т. такі, які не мають спільних точок ні з однією з решти окружностей, не лежать цілком в середині і не заключають в середині себе якої-небудь з решти окружностей.

Вправа №618. Розглядаються три промені, проведені в площині із точки O . Кути між сусідніми променями рівні $2\pi/3$. На променях вибрані точки A_1, A_2, A_3 , і з цих точок як із центрів проведено окружності, які проходять через точку O . Вважаючи даними відстанями A_1O, A_2O, A_3O , вирахувати площу фігури, зображеної на мал. 30, а. Для обрахунку розбити фігуру на частини так, як показано на мал. 30, б.

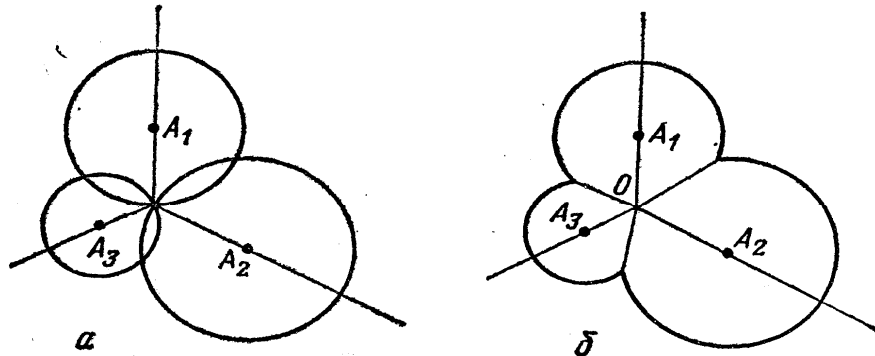


Рис. 30

Вправа №619. Ця вправа є узагальненням попередньої. Розглядається n променів, проведених в площині з точки O ($n \geq 2$). Кути між сусідніми променями рівні $2\pi/n$. Знову на променях вибираються точки $A_1, \dots, A_n$ і проводяться відповідні окружності. Вважаючи даними відстанями $A_1O, A_2O, \dots, A_nO$, вирахувати площу фігури, аналогічно описаній в попередній вправі.

Вправа №620. Медіаною більшості, який складається із парного числа точок площини, ніякі три із яких не лежать на одній прямій, називається пряма, яка сполучає дві точки більшості, з обох сторін від якої лежить рівне число точок.

Дано дійсні числа $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ (n - непарне число). Знайти число медіан більшості точок з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ передбачаючи, що ніякі три точки цієї більшості не лежать на одній прямій.

Вправа №621. Дано дійсні числа a, b, c, d . З'ясувати, чи можна прямокутник з сторонами a, b повністю вміститися в прямокутнику з сторонами c, d (на відмінну від вправи 55, тут не обов'язково взаємна паралельність сторін).

Вправа №622. Дано дійсні числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$. Ця послідовність визначає на площині n квадратів з сторонами, які паралельні осям: a_i, b_i – координати центра квадрата, c_i – довжина його сторони ($i = 1, \dots, n$).

Тут може виявитись корисним попереднє рішення наступної задачі. Сторони двох прямокутників паралельні координатним осям. Кожен прямокутник заданий чотирма дійсними числами – двома абсцисами двома ординатами. Уявити ту частину прямокутника, яка не покривається другим прямокутником, у вигляді об'єднання кількох прямокутників, які не накладаються один на один.

Вправа №623. Дано дійсні числа x, y . В трикутнику, вершинами якого є точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, (x, y) , знайти точку (для визначення її координат дозволяється використовувати методи приблизних обрахунків), сума відстаней від якої до вершини трикутника мінімальна. Відомо (теорема Штейнера), що для трикутника з кутами, які не перевищують $\pi/3$ ця точка співпадає з точкою Торічеллі, тобто з точкою, з якою всі $2\pi/3$ (т. 120°), сторони трикутника видні під кутом $2\pi/3$. Якщо ж в трикутнику є кут, більший кут $2\pi/3$, то рішенням задачі буде вершина цього кута.

Вправа №624. Дано дійсні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Відомо, що точки $p_1, p_2, \dots, p_n$ з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ попарно різні. Розглянемо замкнуту ламану $p_1 p_2 \dots p_n$.

а) Чи вірно, що ламана не має самоперетинів?

б) В передбаченні, що ламана не має самоперетинів, дізнатися, чи є n -кутник $p_1 p_2 \dots p_n$ випуклим.

Вправа №625. Дано дійсні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Відомо, що точки $p_1, p_2, \dots, p_n$ з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ попарно різні. Знайти випуклий багатокутник з вершинами в деяких із точок $p_1, p_2, \dots, p_n$, які містять всі точки $p_1, p_2, \dots, p_n$. Многокутник повинен бути представлений послідовністю вершин.

Вправа №626. Сіткою називається сукупність точок (вузлів), деякі з яких сполучені між собою стрілками. Сітки, які складаються з n вузлів, можна співставити дві квадратні матриці порядку n : матрицю сполучень і матрицю зв'язків. Елемент матриці сполучень a_{ig} рівний 1, якщо сітка містить стрілку, яка веде з вузла i в вузол g , і 0 в іншому випадку ($i, g = 1, \dots, n$).

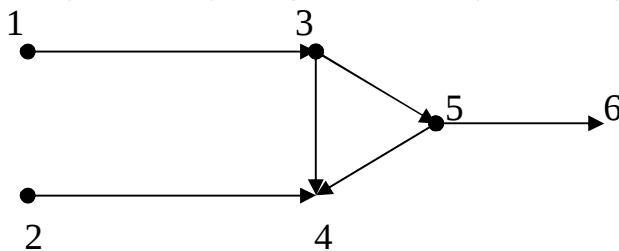
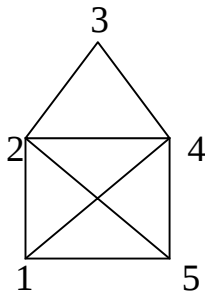


Рис. 32

Елемент b_{ig} матриці зв'язку рівний 1, якщо з вузла i можна потрапити в вузол g , рухаючись по стрілках, і 0 в іншому випадку. Так, для сітки, зображеної на Рис. 32, матриці сполучень і зв'язків мають вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Дана матриця сполучень деякої сітки з n вузлів; отримати матрицю зв'язку цієї сітки.

Вправа №627.

Лінія називається унікаурсальною, якщо її можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу і не проходячи два рази одну й ту ж ланку. Довести, що лінія унікаурсальна тоді і тільки тоді, коли число тих її вузлів, із яких виходить непарне число ланок, не перевищує двох. Лінії, які містять n вузлів, можна співставити квадратну матрицю порядку n – матрицю сполучень, елемент a_{ig} який рівний 1, якщо вузол g деякою ланкою, яке не містить других вершин, і 0 в іншому випадку ($i, g = 1, \dots, n$).

Для лінії зображеної на Рис. 33, матриця сполучень має вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Дана матриця сполучень для лінії з n вузлами. З'ясувати, чи є лінія унікаурсальною, якщо так, то отримати послідовність номерів вузлів, які будуть пройдені під час викреслювання.

§ 18. Сортювання масивів і файлів*)

*) У вправах 628 – 648 цього параграфа суттєво, що дані розглядаються в програмі як масив; у вправах 649 – 657 розглядаються файли, і це ускладнює деякі алгоритми.

Вправа №628. Розглянемо масив цілих чи дійсних чисел $a_1, \dots, a_n$. Нехай потрібно переставити елементи цього масиву так, щоб після перестановки вони були виставлені по зростанню: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Ця вправа називається задачею сортювання чи упорядкування масиву (цю ж вправу можна розглядати, як упорядкування по спаданню: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$; якщо числа попарно різні, то можна говорити про спадання і про зростання). Для рішення цієї задачі можна використати, наприклад, наступні алгоритми:

а) Знайти елемент масиву, який має найменше значення, переставити його з першим елементом, потім проробити те саме, починаючи з першого елемента і т. д. (Сортювання вибором.)

б) Послідовним переглядом чисел $a_1, \dots, a_n$ знайти найменше значення і таке, що $a_i > a_{i+1}$. Поміняти a_i і a_{i+1} місцями, розпочати перегляд з елемента a_{i+1} і т. д. Тим самим найбільше число переміститься на останнє місце.

Наступні перегляди розпочинати знову спочатку, зменшуючи на одиницю кількість елементів, що переглядаються. Масив буде упорядкований після перегляду, в якому брали участь тільки перший і другий елементи. (Сортування обмінами.)

в) Переглядати послідовність $a_2, \dots, a_n$ і кожний новий елемент a_i вставляти на вигідне місце в уже упорядковану сукупність $a_1, \dots, a_{i-1}$. Це місце визначається послідовним порівнянням a_i з упорядкованими елементами $a_1, \dots, a_{i-1}$. (Сортування простими вставками.)

Написати програми, які використовують алгоритми а), б), в).

Вправа №629. Дослідити число порівнянь і число переміщень (тобто перестановок з одного місця в інше) елементів $a_1, \dots, a_n$ в процесі примінення описаних в попередній задачі алгоритмів. Показати, що число переміщень для алгоритму сортування вибором обмежено деякою лінійною функцією від n . В цей же самий час і число порівнянь для алгоритму сортування вибором, і обидві вказані сортування обмінами і сортування простими вставками в деяких випадках (наприклад, коли кінцевий масив такий, що $a_1 > a_2 > \dots > a_n$) є квадратичними функціями від n .

Вправа №630. З тверджень попередньої задачі слідує, що алгоритм сортування вибором вигідно відрізняється від алгоритмів сортування обмінами і сортування простими вставками в тих випадках, коли переміщення елемента виявляється більш тяжким ділом, чим порівняння елементів. Використати це при виконанні наступних завдань.

Дано дійсну матрицю розміру $n \times m$; упорядкувати (переставити) рядки матриці:

- а) по зростанню значень перших елементів рядків;
- б) по спаданню сум елементів рядків;
- в) по зростанню значень найменших елементів рядків;
- г) по спаданню значень найбільших елементів рядків.

В завданнях б), в), г) дозволяється додатково визначити числовий масив $a_1 \dots a_n$.

Вправа №631. Нехай дано упорядкований по не спаданню масив цілих чи дійсних чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ і нехай дано деяке число b (відповідно ціле чи дійсне), для якого потрібно знайти таке місце серед $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, щоб після вставки числа b на це місце впорядкованість не порушилась. Якщо внаслідок рівності між собою деяких елементів масиву число b можна вставляти на різні місця, то потрібно визначити найближче до початку масиву місце. Ця вправа називається пошуку місця елемента. Для b мається $n+1$ можливість: $b \leq a_1, b \leq a_2, \dots, a_{n-1} < b \leq a_n, a_n < b$, і розв'язком задачі пошуку місця елемента b буде відповідно одне з чисел $1, \dots, n+1$. Для розв'язку задачі корисний алгоритм, що називається алгоритмом поділу навпіл: взяти спочатку 1 і $n+1$ як границі пошуку місця елемента; далі, доти, поки границі не співпадуть, крок за кроком зсовувати ці границі наступним чином: порівняти b з a_s , де s — ціла частина

середньоарифметичного границь; якщо $a_s < b$, то замінити попередню границю на $s+1$, а верхню залишити без змін, інакше залишити без зміни нижню границю, а верхню змінити на s ; коли границі співпадуть, ставши рівними деякому числу t , виконання вищеописаного алгоритму закінчиться з результатом t . (Число порівнянь, необхідних цим алгоритмом, не перевершує $\lceil \log_2(n+1) \rceil + 1$).

а) Дано дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ ($a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$). Одержати натуральні числа $k_1, \dots, k_m$ такі, щоб k_i — це розв'язок задачі пошуку місця b_i серед $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($i=1, \dots, m$). Примінити алгоритм поділу навпіл.

б) Таблиця виграшів грошової лотереї представ масивом номерів, що виграли, $a_1, a_2, \dots, a_n$ і масивом виграшів у гривнях, $p_1, \dots, p_n$ (p_i — це виграш, що випав на номер a_i ($i=1, \dots, n$)). Визначити сумарний виграш, що випав на квитки з номерами $b_1, b_2, \dots, b_m$. Примінити алгоритм поділу навпіл.

в) Нехай місце деякого числа b серед упорядкованих по не спаданню $a_1, a_2, \dots, a_n$ вибирається як найбільш віддалене від початку послідовності місце, на якому можна вставити це число, не порушуючи цим упорядкування по не спаданню. Внести зміна в алгоритм поділу навпіл і відповідно дати новий розв'язок завдання а), сформульованого вище.

Вправа №632. Дано дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_n, p$, натуральне число k ($a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, k \leq n$). Вилучити з $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ елемент із номером k (тобто a_k) і вставити елемент, рівний p , так, щоб не порушилась впорядкованість.

Вправа №633. Алгоритм упорядкування простими вставками (див. алгоритм в) у вправі 628) можна змінити таким чином. Місце, на яке треба вставити a_i у вже впорядковану сукупність $a_1, \dots, a_{i-1}$ визначається алгоритмом сортування, який називається алгоритмом поділу навпіл (див. вправу 631). Одержати новий алгоритм сортування, що називається алгоритмом сортування бінарними вставками (слова “бінарна вставка” слід розуміти як “вставка поділом навпіл”). Цей алгоритм вимагає усього біля $n \log_2 n$ порівнянь елементів. Написати програму, що реалізує цей алгоритм.

Вправа №634. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати в порядку зростання всі різні числа, що входять в $a_1, \dots, a_n$. Тут зручно скористатися алгоритмом сортування вставками (якщо n велике, то краще застосувати бінарні вставки; якщо n порівняно мале, скажімо, $n < 50$, то можна обійтися і простими вставками). У процесі сортування варто відкидати елементи, які вже зустрічалися раніш. Якщо в результаті пошуку місця a_i в упорядкованій сукупності $a_1, \dots, a_k$ ($k < i$) виявиться, що серед $a_1, \dots, a_k$ є елемент, рівний a_i , то необхідно перейти до розгляду a_{i+1} без зміни $a_1, \dots, a_k$.

Вправа №635. Дані дійсні числа $c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_q$ ($c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p, d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_q$). Внести єдину упорядкованість в $c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_q$, отримавши $f_1, f_2, \dots, f_{p+q}$ такі, що $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_{p+q}$. Число порівнянь не повинно перевищувати $p+q$.

Вправа №636. Алгоритм фон Неймана упорядкування масиву $a_1, \dots, a_n$ по не спаданню (алгоритм сортування злиттям) базується на багатократному злитті вже впорядкованих груп елементів масиву (див. попередню вправу). Спочатку весь масив розглядається як сукупність впорядкованих груп по одному елементу в кожному. Злиттям сусідніх груп одержимо упорядковані групи, кожна з них містить два елементи (крім, можливо, останньої групи, якій не знайшлось пари). Далі упорядковані групи укрупнюються таким самим способом і т. д. Тут приходиться оперувати не тільки з масивом $a_1, \dots, a_n$, а й допоміжним масивом $b_1, b_2, \dots, b_n$ (початкові значення його елементів не грають ролі). Рис. 34 демонструє два послідовних етапи укрупнення: масиви $a_1 \dots, a_n$ і $b_1 \dots, b_n$ представлені у вигляді відрізків, що розбиті на частини, що зображують впорядковані групи.

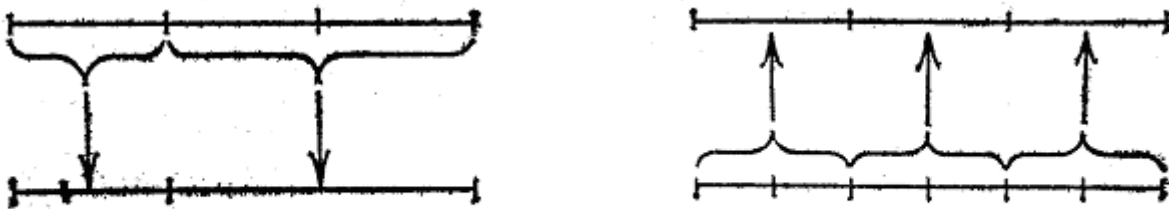


Рис. 34

Число упорядкованих груп зменшується, отже, настане такий момент, коли в масиві $a_1 \dots, a_n$ чи $b_1, \dots, b_n$ буде міститися тільки одна впорядкована група. А це означає, що масив упорядкований. Для злиття двох впорядкованих груп, що містять відповідно p і q елементів, досить зробити не більш $p + q$ порівнянь. Отже, для одного етапу укрупнення досить зробити не більш n порівнянь. Стільки ж потрібно на одному етапі і переміщень. Можна показати, що алгоритм фон Неймана потребує в цілому приблизно $n \log_2 n$ порівнянь і стільки ж переміщень. З розглянутих дотепер алгоритмів тільки алгоритм сортування бінарними вставками вимагав настільки невеликого числа порівнянь. Однак алгоритм фон Неймана вигідно відрізняється від останнього алгоритму тим, що вимагає менше переміщень елементів $a_1, \dots, a_n$ (хоча і вимагає додаткового масиву $b_1, \dots, b_n$).

Написати програму, що реалізує алгоритм фон Неймана.

Вправа №637. Нехай даний масив $a_1 \dots, a_n$. Потрібно переставити $a_1, \dots, a_n$ так, щоб спочатку в масиві йшла група елементів, більших того елемента, що у даному масиві розташовувався на першому місці, потім – сам елемент, потім – група елементів, менших чи рівних йому. Число порівнянь і переміщень, кожного окремого елемента, не повинно перевищувати $n-1$.

Вправа №638. На перетворенні масиву, описаному в попередній задачі, ґрунтується наступний рекурсивний алгоритм сортування (так зване швидке сортування). Якщо масив містить не більш одного елемента, то

він впорядкований. Інакше застосовуємо до нього перетворення описане в попередній задачі, і визначаємо результат застосування алгоритму швидкого сортування до $a_1, \dots, a_n$ таким чином: спочатку йде перша група елементів, упорядкована за допомогою алгоритму швидкого сортування, потім без зміни той елемент, що розділяв першу і другу групи елементів, потім друга група елементів, упорядкована за допомогою алгоритму швидкого сортування. Цей алгоритм не використовує додаткового масиву і вимагає в середньому приблизно $n \log_2 n$ порівнянь і стільки ж переміщень елементів. Правда, це лише середнє число: у гіршому випадку число порівнянь може досягати $n(n-1)/2$; крім того, алгоритм швидкого сортування містить рекурсії.

Написати програму, що реалізує алгоритм швидкого сортування.

Вправа №639. На перетворенні масиву, описаному у вправі 637, ґрунтується також наступний алгоритм пошуку значення k -го по величині елемента масиву $a_1, \dots, a_n$ (тобто того елемента, який би зайняв місце з номері після упорядкування масиву). Нехай у результаті перетворення, описаного у вправі 637, перший елемент зайняв p -те місце; якщо $k = p$, то пошук закінчений; якщо $k < p$ то треба перейти до пошуку k -го по величині елемента в початковій групі елементів, що містять $p-1$ елемент (вправа спростилася, тому що $p-1 < n$; якщо ж $k > p$, треба перейти до пошуку $(k-p)$ -го по величині елемента в другій групі елементів (вправа спростилася, тому що $n-p < n$). Цей алгоритм не містить рекурсій. Не користуючись рекурсіями, написати програму, що реалізує цей алгоритм.

Вправа №640. Неважко помітити, що алгоритм, описаний в попередній вправі, фактично дозволяє знайти не толь k -й по величині елемент, але і додатково 1-й, 2-й, ..., $(k-1)$ -й елементи, хоча й у неупорядкованому вигляді. Базуючись на цьому, виконати наступні завдання:

а) В масиві $a_1, \dots, a_{2m+1}$ знайти $(m+1)$ -й по величині елемент (це так звана медіана масиву $a_1, \dots, a_{2m+1}$) і групу елементів з першими m значеннями.

б) Знову розв'язати вправу 170, встановивши для $k=4$.

Вправа №641. Алгоритм сортування обмінами (див. алгоритм б) вправи 628) також має свої переваги. Розглянемо наступний приклад. Нехай слова, які можна виділити в масиві символів $a_1, \dots, a_n$ (див. вправу 269), потрібно переставити у лексикографічному порядку. Тому що різні слова можуть мати різну довжину, то без великих утруднень можна змінювати місцями тільки слова, що розташовані поряд. Але алгоритм сортування обмінами і передбачає тільки такі обміни. Ця вправа не є, звичайно, задачею сортування масиву, проте алгоритм сортування обмінами виявляється тут корисним. Написати програму, передбачаючи, що довжина слова не перевершує п'ятнадцяти.

Вправа №642. Алгоритм б), сформульований у вправі 628, – це строго говорячи, лише один з алгоритмів сортування обмінами. Він іноді називається алгоритмом бульбашки. Є і інші алгоритми, що природно віднести алгоритмам сортування обмінами. Приведемо приклад такого алгоритму. Послідовним переглядом чисел $a_1, \dots, a_n$ знайти найменше i таке, що $a_i > a_{i+1}$. Поміняти a_i і a_{i+1} місцями і відновити перегляд з початку масиву. Коли не вдасться знайти таке i , масив буде впорядкований потрібним чином. Написати програму, яка реалізує цей алгоритм.

Вправа №643. Розглянути всі алгоритми сортування, сформульовані в цьому параграфі, і вказати переваги і недоліки кожного з них. Необхідно пам'ятати, що у випадку невеликих масивів ті алгоритми, що сформульовані у вправі 628, дають цілком задовільний розв'язок задачі. При великих n потрібно ретельно вивчити всі особливості конкретної ситуації і, виходячи з цього, підібрати алгоритм. Задачі сортування масивів виникають не тільки в зв'язку з числовими масивами. Тип елемента може бути досить складним, і треба враховувати, у що обходиться порівняння і переміщення елементів тому чи іншому випадку.

Вправа №644. Дано п'ять попарно різних чисел a, b, c, d, e . Впорядкувати їх по зростанню, використавши для цього не більше семи порівнянь.

Вправа №645. Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати попарно різні цілі числа $j_1, \dots, j_n$ такі, що $1 \leq j_k \leq n$, $k=1, \dots, n$ і $a_{j_1} \geq a_{j_2} \geq \dots a_{j_n}$.

Вправа №646. Дано натуральне число n , цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Знайти найбільше значення, що зустрічається в послідовності $a_1, \dots, a_n$, після викидання з неї:

а) одного з членів зі значенням $\max(a_1, \dots, a_n)$;

б) усіх членів зі значенням $\max(a_1, \dots, a_n)$ – тут передбачається, що не всі числа $a_1, \dots, a_n$ рівні між собою.

Вправа №647. Дано натуральне число n , дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Потрібно знайти $\max(a_1, \dots, a_n)$ і $\min(a_1, \dots, a_n)$. Розглянемо два алгоритми рішення цієї задачі. Перший алгоритм. Крок за кроком одержувати пари $\max(a_1, \dots, a_i)$ і $\min(a_1, \dots, a_i)$ ($i = 1, \dots, n$). При цьому, щоб одержати $\max(a_1, \dots, a_{i+1})$, $\min(a_1, \dots, a_{i+1})$ порівнюються a_{i+1} з $\max(a_1, \dots, a_i)$, а потім, якщо $a_{i+1} < \max(a_1, \dots, a_i)$, додатково порівнюється a_{i+1} з $\min(a_1, \dots, a_i)$. Другий алгоритм. Нехай n – парне число, тобто $n = 2k$. Тоді крок за кроком одержати $\max(a_1, \dots, a_{2l})$, $\min(a_1, \dots, a_{2l})$ ($l = 1, \dots, k$). При цьому, щоб одержати $\max(a_1, \dots, a_{2l+2})$, $\min(a_1, \dots, a_{2l+2})$, спочатку порівнюються між собою a_{2l+1} , a_{2l+2} і $\max(a_{2l+1}, a_{2l+2})$ порівнюються з $\max(a_1, \dots, a_{2l})$, а $\max(a_{2l+1}, a_{2l+2})$ – з $\min(a_1, \dots, a_{2l})$. Якщо n – непарне число, то буде потрібно ще додатковий крок: порівняння останнього елемента a_n з $\max(a_1, \dots, a_{n-1})$ і, можливо, з $\min(a_1, \dots, a_n)$. Скільки порівнянь у гіршому випадку буде потрібно для першого алгоритму і скільки для другого? Написати програму, що реалізує другий алгоритм. (Помітимо, що другий алгоритм дає ще одне рішення вправи 230.)

Вправа №648. Дано натуральні числа $a_1, \dots, a_n$. Нехай $a_1, \dots, a_n$ – перестановка чисел $1, \dots, n$. Одержати натуральні $r_1, \dots, r_n$ такі, що

$$r_{ai} = i \text{ для } i = 1, \dots, n.$$

Вправа №649. Виконати вправи 646, 647, припускаючи, що числа $a_1, \dots, a_n$ є компонентами даного файлу. При цьому значення n невідомо заздалегідь.

Вправа №650. Число компонентів файлу f , компонентами якого є цілі числа, кратні десяти. Переписати компоненти файлу f у файл g , змінюючи порядок чисел у кожній, десятці так, щоб

а) спочатку йшли від'ємні числа десятки, а за ними – додатні;

б) спочатку йшли числа, що поділяються на 3, потім числа, що дають при діленні на 3 залишок 1, потім числа, що дають при діленні на 3 залишок 2.

Порядок самих десятків повинний бути збережений.

Вправа №651. Розглядаються слова (див. вправу 269), що містяться в символічних файлах f_1 і f_2 . Відомо, що число символів у словах не перевершує шістнадцяти. Відомо також, що слова у файлі f_2 йдуть у лексикографічному порядку і їхнє число дорівнює п'ятдесяти. З'ясувати, скільки разів кожне зі слів файлу f_2 зустрічається у файлі f_1 . Для розв'язку задачі переписати слова, що містяться у файлі f_2 , в масив і послідовно застосовувати метод розподілу навпіл (див. вправу 631).

Вправа №652. Нехай файли c і d з компонентами, що є дійсними чи цілими числами, упорядковані по незростанню компонентів. Потрібно зібрати компоненти файлів c і d в упорядкованому виді у файлі f (порівняй із вправою 635). Кількість порівнянь не повинне перевершити $p + q$, де p і q – число компонентів у файлах c і d .

Вправа №653. Нехай a і b – файли, k – натуральне число. Будемо говорити, що файли a і b узгоджено з k – впорядковані, якщо

1) у кожному з файлів a і b перші k компонент, наступні за ними k компонент і т.д. утворюють впорядковані групи; остання група файлу (теж впорядкована) може бути неповною, тобто містити менш k компонент, але при цьому тільки один з файлів a і b може мати неповну останню групу;

2) число упорядкованих груп файлу a відрізняється від числа упорядкованих груп файлу b не більше ніж на одиницю.

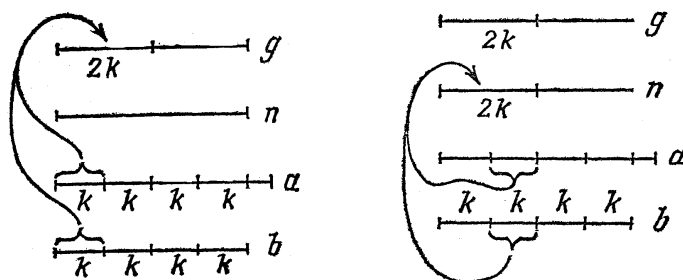


Рис. 35

3) якщо в одному файлі число упорядкованих груп менше на одиницю, чим в іншому, то неповною може бути тільки остання група більш довгого файлу.

Компоненти двох узгоджено з k – упорядкованих файлів a і b можна розмістити у файлах g і h так, що h будуть узгоджено з $2k$ –упорядковані. Це робиться при допомозі описаних у попередній вправі злиттів; при цьому результати злиттів поперемінно розміщуються то у файлі g то у файлі h . Рис. 35 демонструє що відбувається при перших двох злиттях. Файли представлені у вигляді відрізків, частини яких зображують упорядковані групи із зазначеним числом компонентів.

Завершити опис цього алгоритму, розглянувши його заключну стадію. Довести, що файли g і h дійсно будуть узгоджено з $2k$ –упорядковані. Реалізувати цей алгоритм у вигляді програми.

Вправа №654. Для сортування файлу g може бути застосований наступний алгоритм. Нехай h , a , b – допоміжні файли. Насамперед компоненти файлу g розподіляються по файлам a , b : компоненти з парними номерами попадають в a , а компоненти з непарними номерами — у b . Ці компоненти розглядаються як упорядковані групи, по одній компоненті в кожному, а файли a , b – як відповідно 1–впорядковані (див. попередню вправу). Потім при допомозі алгоритму, описаного в попередній вправі, файли g перетворюються в узгоджено 2–упорядковані і т.д. Так як число упорядкованих груп зменшується з кожним застосуванням запропонованого в попередній задачі алгоритму, то настане такий момент, коли усі компоненти зберуться у деякому файлі у виді однієї упорядкованої групи; на цьому упорядкування буде закінчено.

Цей алгоритм дуже схожий на алгоритм фон Неймана для масивів (див. вправу 636) і теж відноситься до алгоритму сортування злиттями. Реалізувати цей алгоритм у вигляді програми.

Вправа №655. Нехай файли a і b , компоненти яких є цілі числа, упорядковані по неспаданню. Одержати у файлі c всі числа файлів a і b без повторень. Файл повинний бути упорядкований по зростанню.

Вправа №656. Дано файл f компоненти якого є цілі числа. Одержати у файлі g усі непарні числа, що входять у файл f . Числа у файлі g повинні слідувати:

- а) у порядку незростання;
- б) у порядку зменшення, без повторень.

Вправа №657. Дано символний файл f , компоненти якого – малі латинські букви і пробіли. Слова (див. вправу 269) файлу f мають не більш шістнадцяти букв. Записати ці слова у файл g у лексикографічному порядку

§19. Многочлени *)

*) Щораз, коли в вправах цього розділу говориться, що дано многочлен $P(x)$ ступеня n , то мається на увазі, що дано дійсні числа (коефіцієнти) $p_0, p_1, \dots, p_n$ такі, що $P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$. Аналогічно, одержати многочлен — це значить одержати послідовність його коефіцієнтів.

Вправа №658. Дано многочлен $P(x)$ ступеня n . Одержати многочлен $P^2(x)$.

Вправа №659. Дано многочлен $P(x)$ ступеня n . Одержати многочлен $P(x+1) - P(x)$. (Яка степінь цього многочлена?).

Вправа №660. Дано многочлен $P(x)$ ступеня n . Одержати його похідну $P'(x)$, а також обчислити $P'(1)$, $P'(2)$, $P'(3)$.

Вправа №661. Дано дійсне число a , многочлен $P(x)$ ступеня n . Одержати:

- а) многочлен $(x-a)P(x)$
- б) многочлен $(x^2 + 2ax + 3)P(x)$;
- в) многочлен $(x^* + a^*)P(x)$.

Вправа №662. Дані дійсні числа s і t , натуральне число n , дійсні числа $a_0, \dots, a_n$. Серед $a_0, \dots, a_n$ є як від'ємні так і додатні числа. Одержати значення $P(s) + Q(t)$, де в якості коефіцієнта a P взяті від'ємні члени послідовності $a_0, \dots, a_n$ (зі збереженням порядку їх слідування), а в якості коефіцієнтів многочлена Q — невід'ємні члени (також зі збереженням порядку їх слідування).

Вправа №663. Дано дійсні числа многочлен $P(x)$ ступеня n . Знайти значення $\int P(x) dx$.

Вправа №664. Дано дійсні числа s, t , многочлен $P(x)$ ступеня n . Одержати многочлен $(sx^2 + t)P(x) + P'(x)$, де $P'(x)$ похідна многочлена $P(x)$.

Вправа №665. Дано дійсні числа $a_0, a_1, \dots, a_5$. Одержати многочлен шостого ступеня $(x-a_0)(x-a_1) \dots (x-a_5)$.

Вправа №666. Дано дійсні числа $a_0, \dots, a_5, d_0, \dots, d_5$. Одержати многочлен шостого ступеня $d_0 + d_1(x-a_0) + d_2(x-a_0)(x-a_1) + \dots + d_5(x-a_0)(x-a_1) \dots (x-a_5)$.

Вправа №667. Дано дійсні числа $a_0, \dots, a_5$, многочлен $P(x)$ шостого ступеня. Одержати дійсні числа $d_1, \dots, d_7$ такі, що

$$P(x) = d_0 + d_1(x-a_0) + d_2(x-a_0)(x-a_1) + \dots + d_7(x-a_0)(x-a_1) \dots (x-a_5).$$

Вправа №668. Послідовність многочленів $T_0(x), T_1(x), \dots$ визначається в таким чином: $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$ ($k = 2, 3, \dots$). Одержати $T_2(x), \dots, T_8(x)$.

Вправа №669. Послідовність многочленів $H_0(x), H_1(x), \dots$ визначається в такий спосіб: $H_0(x)=1, H_1(x)=x, H_k(x)=xH_{k-1}(x)-(k-1)H_{k-2}(x) (k=2, 3, \dots)$.

а) Одержати $H_3(x), H_5(x), H_6(x)$.

б) Дані дійсні числа $a_0, \dots, a_6$. Одержати многочлен $a_0H_0(x) + \dots + a_6H_6(x)$.

в) Дані дійсне число a . Обчислити $H_0(a) + \dots + H_6(a)$.

Вправа №670. Послідовність многочленів $G_0(x), G_1(x), \dots$ визначається в такий спосіб:

$$G_0(x) = 1, G_1(x) = x-1, G_k(x) = (x-2k+1)G_{k-1}(x) - (k-1)^2 G_{k-2}(x) (k=2, 3, \dots)$$

Виконати для $G_0(x), G_1(x), \dots$ завдання а), б), в), сформульовані в попередній вправі для многочленів $H_0(x), H_1(x), \dots$.

Вправа №671. Послідовність многочленів $L_0(x), L_1(x), \dots$ визначається в такий спосіб:

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = x, L_k(x) = xL_{k-1}(x) - \frac{(k-1)^2}{(2k-3)(2k-1)} L_{k-2}(x) \quad k=2, 3, \dots$$

а) Одержати $L_5(x)$ і $L_7(x)$.

б) Дані дійсні числа $d_0, \dots, d_8, a$. Обчислити $d_0 + d_1L_1(a) + \dots + d_8L_8(a)$.

в) Одержати многочлен $L_0(x) + L_1(x) + \dots + L_6(x)$.

Вправа №672. Дано дійсні числа $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ ($a_0, \dots, a_n$ попарно різні). Потрібно знайти многочлен $F(x)$ степеня не вище, ніж n , такий, що $F(a_i) = b_i (i=0, 1, \dots, n)$.

Відзначимо, що неважко побудувати многочлени $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$, кожний з яких має степінь n і які володіють тією властивістю, що $\omega_i(x)$, дорівнює 1 при $x=a_i$ і дорівнює 0 при $x = a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ — цього досить покласти

$$\omega_i(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)},$$

$$i=0, 1, \dots, n.$$

В якості шуканого многочлена $F(x)$ береться сума $b_0\omega_0(x) + b_1\omega_1(x) + \dots + b_n\omega_n(x)$.

§ 20. Перетворення і побудова матриць

Вправа №673. ● ● ● Дано дійсна матриця розміру $n \times (n+1)$, дійсні числа $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1}$, натуральні числа p, q ($p \leq n, q \leq n+1$). Утворити нову матрицю розміру $(n+1) \times (n+2)$ вставкою після рядка з номером p даної матриці нового рядка з елементами $a_1, \dots, a_{n+1}$ і наступною вставкою після стовпчика з номером q нового стовпчика з елементами $b_1, \dots, b_{n+1}$.

Вправа №674. ● ● ● Дано цілі числа $a_1, \dots, a_{10}$, цілочисельна квадратна матриця порядку n . Замінити нулями в матриці ті елементи з парною сумою індексів, для яких є рівні серед $a_1, \dots, a_{10}$.

Вправа №675. ● ● ● Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$, дійсна квадратна матриця порядку n ($n \geq 6$). Одержати дійсну матрицю розміром $n \times (n+1)$, вставивши в дану матрицю між п'ятим і шостим стовпчиками стовпчик з елементами $a_1, \dots, a_n$.

Вправа №676. ● ● ● Дана цілочисельна матриця розміром 6×9 . Знайти матрицю, яку одержано з даної:

а) перестановкою стовпців – першого з останнім, другого з передостаннім і т.д.;

б) перестановкою рядків – першого з останнім, другий з передостаннім і т.д.

Вправа №677. Дана дійсна матриця $[a_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$. Одержати дійсну матрицю $[b_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$, елемент b_{ij} , який рівний сумі елементів даної матриці, розміщених в області, визначеній індексами i, j так, як показано на мал. (область заштрихована).

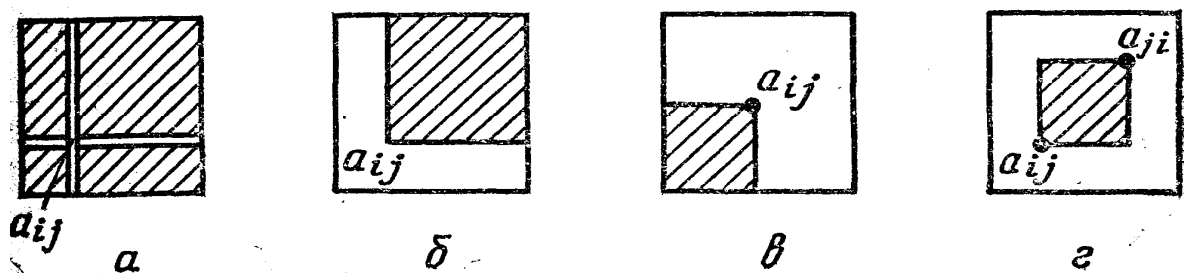


Рис.36

Вправа №678. ● ● ● Дана дійсна квадратна матриця порядку n . Перетворити матрицю по правилу: рядок з номером n зробити стовпчиком з номером n , а стовпчиком з номером n зробити рядком з номером n .

Вправа №679. ● ● ● Дано дві дійсні квадратні матриці порядку n . Одержати нову матрицю:

а) множенням елементів кожного рядка першої на найбільше з значення елементів відповідного рядка другої матриці;

б) додавання до елементів кожного стовпчика першої матриці добутку елементів відповідних рядків другої матриці.

Вправа №680. ●●● В даній дійсній матриці розміром $n \times m$ ($n \geq 3, m \geq 3$) поміняти місцями:

- а) рядки з номерами 2 і $n-1$;
- б) стовпчики з номерами 3 і $n-2$.

Вправа №681. Дані дійсні числа $b_1, \dots, b_{15}$. В дійсній матриці $[a_{ij}]_{i=1, \dots, 17; j=1, \dots, 10}$ перший і останній рядок заповнений нулями: $a_{11}=a_{12}=\dots=a_{110}=a_{171}=a_{172}=\dots=a_{1710}=0$. Елементи $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{161}$ першого стовпчика відповідно дорівнюють $b_1, \dots, b_{15}$. Відомо, що при $2i \leq 16, 2 \leq j \leq 10$ має місце $a_{ij}=(a_{i+1,j-1}+a_{i-1,j-1})$. Необхідно визначити $a_{210}, a_{310}, \dots, a_{1610}$.

Вправа №682. ● Дана цілочисельна матриця розміром $n \times 3$, цілі числа k, l ($1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n, k \neq l$). Перетворити матрицю так, щоб рядок з вихідним номером k безпосередньо слідував за рядком з вихідним номером l , зберігши порядок слідування інших рядків.

Вправа №683. ●●● Назвемо допустимим перетворенням матриці перестановку двох рядків або двох стовпчиків. Дана дійсна квадратна матриця порядку n . З допомогою допустимих перетворень добитись того, щоб

- а) один з елементів матриці, який має найбільший по модулю значення, розмістився в лівому верхньому кутку матриці;
- б) один з елементів матриці, який має найменший по модулю значення, розмістився в лівому нижньому кутку матриці.

Вправа №684. ●●● В даній дійсній квадратній матриці порядку n знайти найбільший по модулю елемент. Одержати квадратну матрицю порядку $n-1$ шляхом вилучення з даної матриці якого-небудь рядка і стовпчика на перетині яких розміщений елемент з знайденим значенням.

Вправа №685. ●●● Дана дійсна квадратна матриця порядку n , всі елементи якої різні. Знайти найбільший елемент серед тих, які стоять на головній і побічній діагоналях і поміняти його місцями з елементом, який стоїть на перетині цих діагоналей.

Вправа №686. ●●● Побудувати квадратну матрицю порядку $2n$:

$$\begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{matrix} 11\dots 1 & 22\dots 2 \\ 11\dots 1 & 22\dots 2 \\ \dots\dots\dots \\ 11\dots 1 & 22\dots 2 \end{matrix} \right\} \\ \\ n \\ \left\{ \begin{matrix} 33\dots 3 & 44\dots 4 \\ 33\dots 3 & 44\dots 4 \\ \dots\dots\dots \\ 33\dots 3 & 44\dots 4 \end{matrix} \right\} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_n \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_n \end{matrix}$$

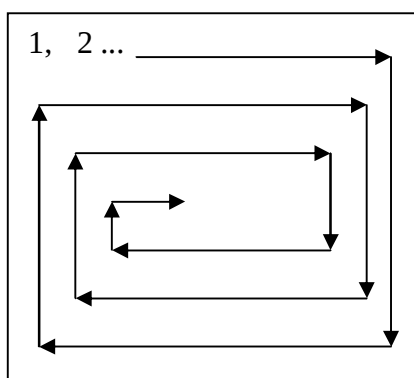
Вправа №687. ● ● ● Дано дійсне число x . Побудувати квадратну матрицю порядку 10: (середина заповнена нулями)

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^8 & x^9 \\ x & 0 & \dots & 0 & x^8 \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ x^8 & 0 & \dots & 0 & x \\ x^9 & x^8 & \dots & x & 1 \end{bmatrix}$$

Вправа №688. ● ● ● Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Одержати квадратну матрицю порядку n :

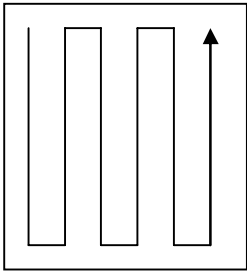
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_n & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Вправа №689. ● ● ● Одержати цілочисельну квадратну матрицю порядку 7, елементами якої є числа 1, 2, 3, ..., 49, розміщені по спіралі.

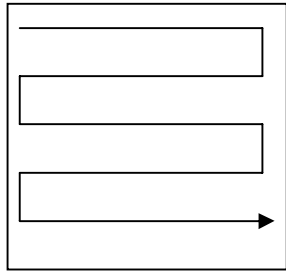


Вправа №690. ● ● ● Дана дійсна квадратна матриця порядку 7. знайти послідовність дійсних чисел $b_1, \dots, b_n$, що одержується при читанні даної матриці по спіралі. (див. попередню вправу).

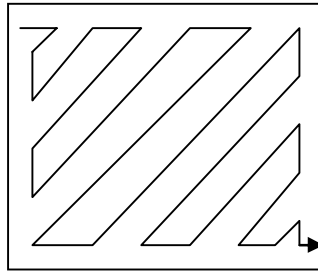
Вправа №691. ● ● ● Дано дійсні числа $a_1, \dots, a_{64}$. Одержати дійсну квадратну матрицю порядку 8, елементами якої є числа $a_1, \dots, a_{64}$, розміщені по схемі, яка приведена на малюнках



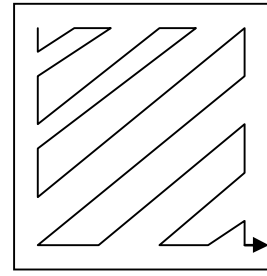
а



б

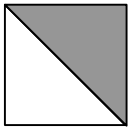


в

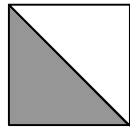


г

Вправа №692. ● ● ● Дана дійсна квадратна матриця порядку n . Знайти найбільше значення з елементів, розміщених в заштрихованій частині матриці:



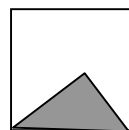
а



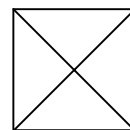
б



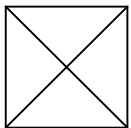
в



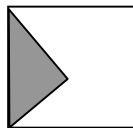
г



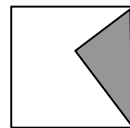
д



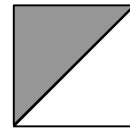
е



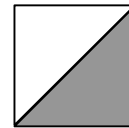
ж



з

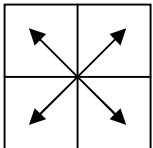


и

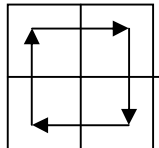


к

Вправа №693. Дана дійсна квадратна матриця порядку $2n$. Одержати нову матрицю, переставляючи її блоками розміру $n \times n$



а



б

- а) у відповідності з мал. а;
б) у відповідності з мал. б.

Вправа №694. ● ● ● Одержати квадратну матрицю порядку n :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

а

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 0 & & 2 \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ n & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

б

$$\begin{bmatrix} n & & 0 \\ & n-1 & \\ & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

В

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & & & \\ 1 \cdot \dots & & 0 \\ & \cdot \cdot \cdot & \\ & & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & & \cdot \cdot 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Д

$$\begin{bmatrix} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \\ 2 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \\ 3 \ 3 \ \dots \ 3 \\ & \cdot \\ & 1 & 0 \\ n & & \end{bmatrix}$$

Ж

$$\begin{bmatrix} 1 & & \cdot & 1 \\ 1 \ 1 & \cdot & 0 \cdot & 1 \ 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 \ 1 & 0 & & 1 \ 1 \\ 1 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

И

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & & \\ 2 \cdot 3 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ & & & \cdot \\ 0 & & & n(n+1) \end{bmatrix}$$

Г

$$\begin{bmatrix} 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \\ 1 & & & 1 \\ \cdot & 0 & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 1 \ 1 \ \dots \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Е

$$\begin{bmatrix} 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \\ 1 \ \dots \ 1 \\ \cdot \cdot \\ 0 & \cdot \cdot & 0 \\ & 1 \cdot \cdot \cdot 1 \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \end{bmatrix}$$

З

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \ n \\ n-2 \ n-1 \ n \ 0 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 \ 2 \ 3 \dots n \end{bmatrix}$$

К

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-1 & n \\ n-1 & n \\ n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2 \dots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1 \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & n-3 \dots & 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Л

М

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!^2} & \frac{1}{2!^2} & \dots & \frac{1}{n!^2} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ \frac{1}{1!^n} & \frac{1}{2!^n} & \dots & \frac{1}{n!^n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & n \\ & 2 & 0 & n-1 \\ & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & 2 & 0 & n-1 \\ 1 & & & n \end{bmatrix}$$

Н

О

Вправа №695. ● Таблиця футбольного чемпіонату, в якому приймало участь n команд (див. вправу 413), задана своєю верхньою частиною в вигляді послідовності чисел 0, 1, або 2; перші $n-1$ чисел послідовності відносяться до першого рядка таблиці, наступні $n-2$ чисел – до другого і т.д. Побудувати таблицю повністю, тобто одержати відповідну квадратну матрицю порядку n (елементи головної діагоналі заповнюються нулями).

Вправа №696. Мається таблиця футбольного чемпіонату, в якому приймало участь n команд (див. вправу 413). Таблиця представлена цілочисельною квадратною матрицею порядку n . Переставити цю таблицю, присвоївши кожній команді номер, рівний відповідному зайнятому нею місцем (для простоти вважається, при рівній кількості очок місця розподіляються довільно). Окремо вказати розподіл команд в старій нумерації по зайнятим ними місцях.

§ 21. Матрична алгебра*)

*) У матричній алгебрі [10] прийнято позначати матрицю якою-небудь великою буквою латинського алфавіту, а елемент матриці — однойменною малою буквою з індексами. Така система позначень витримана й у цьому розділі книги. За винятком вправи 714, у всіх вправах матриці і вектори вважаються дійсними.

Вправа №697. Дано матриці A і B розміру $k \times m$ і $m \times l$ відповідно. Знайти добуток AB .

Вправа №698. Дано квадратну матрицю порядку n . Одержати матрицю A^2 .

Вправа №699. Дано квадратні матриці A і B порядку n . Одержати матрицю $AB-BA$.

Вправа №700. Дано квадратну матрицю A порядку n . Одержати матрицю AB ; елементи матриці B обчислюються по формулі:

$$\begin{aligned} \text{а) } b_{ij} &= \frac{1}{i+j-1}; \\ \text{б) } \begin{cases} b_{ij} = \frac{1}{i+j-1} & \text{якщо } i \leq j, \\ b_{ij} = \frac{1}{i+j-1} & \text{у протилежному випадку;} \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} b_{ij} = \frac{1}{i+j-1} & \text{якщо } i < j, \\ 0 & \text{якщо } i = j, \\ b_{ij} = -\frac{1}{i+j-1} & \text{у протилежному випадку} \end{cases} \\ & (i, j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Вправа №701. Дано квадратну матрицю A порядку n і вектор b з n елементами. Одержати вектор:

- а) Ab ;
- б) A^2b ;
- в) $(A-E)b$, де E — одинична матриця порядку n .

Вправа №702. Дана квадратна матриця порядку n . Одержати вектор Ab , де b — вектор, елементи якого обчислюються по формулі:

$$\begin{aligned} \text{а) } b_i &= \frac{1}{i^2 + 2} \\ \text{б) } b_i &= \begin{cases} \frac{1}{i^2 + 2} & \text{якщо } i \text{ — парне} \\ \frac{1}{i} & \text{у протилежному випадку} \end{cases} \\ & (i, j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Вправа №703. Дано квадратну матрицю A порядку n , вектори x і y з n елементами. Одержати вектор $A(x+y)$.

Вправа №704. Дано квадратні матриці A , B і C порядку n одержати матрицю $(A + B)C$.

Вправа №705. Дано квадратні матриці A і B порядку n . Одержати матрицю $A(B - E) + C$ де E — одинична матриця порядку n , а елементи матриці C обчислюються по формулі

$$C_{ij} = \frac{1}{i+j}, \quad i, j=1, 2, \dots, n.$$

Вправа №706. Нехай дано квадратна матриця A порядку m . Натуральне число n ; потрібно знайти A^n . Алгоритм заснований на безпосереднім застосуванні формули $A^n = A \cdot A \dots A$ (n співмножників), занадто спустошливий. Наприклад, A^4 економніше обчислювати як $(A^2)^2$. Ідея одного досить ошадливого алгоритму обчислення A^n полягає в наступному: якщо $n=2k$, то $A^n = (A^2)^k$ — якщо ж $n = 2k+1$, то $A^n = (A^2)^k \cdot A$. Степінь з показником k обчислюється з урахуванням цих же розумінь. Отже, треба поділити n на 2 із залишком: $n = 2k + l$ ($0 < l < 1$), потім це ж проробити з k і т. д. Ці дії приводять, як відомо, до побудови двійкового запису n . Алгоритм, розроблений на цій ідеї, полягає в тому, що послідовно обраховуються

$A^{\alpha_0}, A^{\alpha_1 \alpha_0}, \dots, A^{\alpha_l \alpha_{l-1} \dots \alpha_1 \alpha_0}$ де $\alpha_l \alpha_{l-1} \dots \alpha_1 \alpha_0$ — двійковий запис числа n .

Для цього обчислюється цифра за цифрою, двійковий запис числа n і, паралельно, степінь за степеню, $A^{(2^0)}, A^{(2^1)}, A^{(2^2)}$ — кожна наступна степінь виходить з попередньої зведенням у квадрат. Підраховується добуток тих з обчислених степенів, для яких відповідна цифра двійкового представлення дорівнює 1. Наприклад, запис 9 у двійковій системі 1001 ($9 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1$); для обчислення A^9 досить знайти A^2, A^4, A^8 (3 множення), а потім визначити $A \cdot A^8$ (1 множення).

Перевага цього алгоритму в порівнянні з простішим полягає в тому, що найпростіший алгоритм вимагає число множень, що росте як лінійна функція від n , а тут число множень, грубо говорячи, пропорційно кількості цифр числа n чи віськовому логарифму n . Ця перевага дуже відчутна при роботі з матрицями (з-за трудомісткості кожного множення), хоча, зрозуміло, цей алгоритм може бути використаний і для обчислення степені будь-якого числа.

Написати програму, що реалізує запропонований алгоритм.

Вправа №707. Дано квадратну матрицю A порядку 5. Одержати матрицю A^{15} (див. вправу 706).

Вправа №708. Дано квадратну матрицю A порядку m , натуральне число n . Одержати матрицю $E + A + A^2 + \dots + A^n$, де E — одинична матриця порядку m .

Вправа №709. Дано квадратну матрицю A порядку m , натуральне число n , дійсні числа $p_n, p_{n-1}, \dots, p_0$. Одержати матрицю $p_n A^n + p_{n-1} A^{n-1} + \dots + p_1 A + p_0 E$, де E — одинична матриця порядку m .

Вправа №710. Дано матрицю A розміру $m \times n$. Одержати транспоновану матрицю A^* (її розмір — $n \times m$).

Вправа №711. Дано матрицю A ;

а) розміру $m \times m$;

б) розміру $m \times n$.

Одержати матрицю AA^* (її розмір – $m \times n$).

Вправа №712. Дано квадратну матрицю A порядку m . Одержати матриці $\frac{1}{2}(A + A^*)$ і $\frac{1}{2}(A - A^*)$.

Вправа №713. Слідом квадратної матриці називається сума елементів, розташованих на головній діагоналі.

Дано квадратну матрицю порядку m , натуральне число n . Обчислити сліди матриць $A, A^2, \dots, A^n$.

Вправа №714. Комплексна матриця Z представляється парою X, Y дійсних матриць так, що $Z = X + iY$. Дано дійсні квадратні матриці A, B, C і D порядку m . Знайти добуток двох комплексних матриць $A + iB$ і $C + iD$, тобто знайти дійсні квадратні матриці X і Y порядку m такі, що $X + iY = (A + iB)(C + iD)$.

Вправа №715. Нехай для квадратної матриці A , що має порядок n , існує зворотна матриця A^{-1} . Тоді, розглядаючи елементи матриці A^{-1} як невідомі величини, з співвідношення $AA^{-1} = E$, де E – одинична матриця порядку n , можна одержати систему n^2 лінійних рівнянь з n^2 невідомими. Знайти матрицю цієї системи і вектор, що визначає її праву частину, вважаючи що невідомі елементи матриці A^{-1} пронумеровані так, що спочатку йдуть елементи першого рядка, потім – другого і т.д.. Вважати, що A – задана матриця порядку 4; у відповіді повинно одержатись квадратна матриця і вектор порядку 16.

Вправа №716. Права трикутна матриця A порядку n задана у вигляді послідовності $(n+1)n/2$ чисел: спочатку йде n елементів першого рядка, потім $n-1$ елемент другого рядка, починаючи з другого елемента, і т.д. (з останнього рядка береться тільки n -й елемент). Крім цієї послідовності даний вектор b з n елементами. Знайти вектор Ab .

Вправа №717. Дві праві трикутні матриці A і B порядку n задані так, як описано в попередній задачі. Одержати в аналогічному вигляді:

а) матрицю AB ;

б) матрицю $A(E + B^2)$, де E – одинична матриця порядку n .

Вправа №718. Симетрична квадратна матриця A порядку n задана послідовністю $n(n+1)/2$ чисел, аналогічно правій трикутній матриці (див. вправу 716). Крім цієї послідовності даний вектор b з n елементами. Знайти вектор Ab .

Вправа №719. Симетричні квадратні матриці A і B порядку n задані послідовностями з $n(n+1)/2$ чисел, аналогічно правим трикутним матрицям (див. вправу 716). Одержати в аналогічному виді:

а) матрицю AB ;

б) матрицю $A^2 - B^2$.

§ 22. Чисельні методи *)

*) З чисельними методами, розглянутими в вправах цього розділу можна ознайомитися в[10].

Вправа №720. Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_m$. ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $x_1 \leq t_i \leq x_n$, $i=1, \dots, m$) число y являє собою значення деякої функції f від аргументу $y_j = f(x_j)$ ($j=1, \dots, n$). За допомогою лінійної інтерполяції одержати значення $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_m)$.

Вправа №721. Дано дійсні числа $h, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Все сказане про $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ у попередній вправі залишається в силі. За допомогою лінійної інтерполяції одержати значення функції f для значень аргументів, рівних $x_1, x_1+h, x_1+2h, \dots, x_1+kh$, де k – найбільше ціле, для якого $x_1+kh \leq x_n$.

Вправа №722. Дано натуральне число x , дійсні числа $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Розглянути попередню вправу вважаючи, що $h = (x_n - x_1)/n$ (відповіддю повинна слугувати послідовність, що містить $n+1$ число).

Вправа №723. Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_n, y_1 \leq t \leq y_n$). Передбачається, $y_1, \dots, y_n$ являють собою результати виміру температури повітря в моменти часу $x_1, \dots, x_n$. При допомозі лінійної інтерполяції указати всі моменти часу, коли температура повітря була рівною t (не виключений випадок коли $y_j = y_{j+1} = t$ для деяких j ($1 \leq j \leq n-1$)).

Вправа №724. Повернутися до вправ 721, 723, вважаючи, що різниця між сусідніми відомими значеннями аргументу $x_1, \dots, x_n$ рівні між собою: $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \dots = x_2 - x_1 = h$. Замість $x_1, \dots, x_n$ задаються x_1 і h , порядок інших вихідних даних не змінюється.

Вправа №725. Дано дійсне позитивне число ε . Методом ділення відрізка навпіл знайти наближене значення кореня рівняння $f(x) = 0$. Абсолютна похибка знайденого значення не повинна перевершувати ε . (Нижче, поряд з рівнянням $f(x) = 0$, додатково зазначений відрізок, який містить корінь.)

а) $x + \ln(x+0.5) - 0.5 = 0, \quad [0, 2];$

б) $x^5 - x - 0.2 = 0, \quad [1, 1.1];$

в) $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0, \quad [0, 1];$

г) $x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0, \quad [1, 1.5];$

д) $\frac{2\sin^2 x}{3} - \frac{3\cos^2 x}{4} = 0 \quad [0, \pi/2];$

е) $x^4 + 0.8x^3 - 0.4x^2 - 1.4x - 1.2 = 0, \quad [-1.2, -0.5]$

ж) $x^4 - 4.1x^3 + x^2 - 5.1x + 4.1 = 0, \quad [3.7, 5].$

Вправа №726. Дано дійсне позитивне число ε . Методом хорд обчислити з точністю ε *) корінь рівняння $f(x) = 0$ (нижче, слідом за рівнянням $f(x) = 0$, додатково заданий відрізок, що містить корінь):

*) Коли заходить мова про “обчислення з точністю ε ”, слід мати на увазі, що лише деякі чисельні методи, засновані на побудові послідовних наближень $x_0, x_1, \dots$ шуканому числу x , гарантують, подібно методу розподілу відрізка навпіл, що абсолютна похибка знайденого значення буде менше ε . Будемо вважати, що необхідна точність ε досягнута, як тільки отримане таке x_m (при $m > 1$), для якого $|x_m - x_{m-1}| < \varepsilon$. У даній задачі передбачається, що в програмі буде реалізований саме цей підхід до оцінки точності.

- а) $x \cdot 2^x - 1 = 0$, $[0, 1]$;
 б) $x^2 - \sin 5x = 0$, $[0.5, 0.6]$;
 в) $\frac{2 \sin^2 2x}{3} - \frac{3 \cos^2 2x}{4} = 0$ $[0, \pi/4]$
 г) $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ $[2.1, 2.2]$
 д) $(4 + x^2)(e^x - e^{-x}) = 18$, $[1.2, 1.3]$
 е) $x^4 + 0.5x^3 - 4x^2 - 3x - 0.5 = 0$, $[-1, 0]$
 ж) $x^2 - 1.3 \ln(x + 0.5) - 2.8x + 1.15 = 0$, $[2.1, 2.5]$.

Вправа №727. Повернутися до попереднього задачі, вважаючи, що побудова наближених до кореня рівняння $f(x) = 0$ впливає коли буде отримане таке наближення $\bar{x}$, для якого $|f(x)| < \varepsilon$. (Цей підхід до оцінки точності може бути прийнятним тільки в тих випадках, коли відомо, що $|f(x)|$ не приймає значень менше ε при значеннях x , віддалених від кореня рівняння $f(x) = 0$; Рис. 41, а, б.)

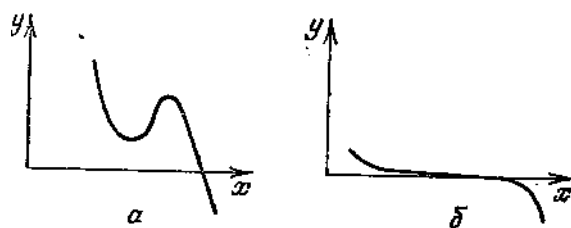


Рис. 41

Вправа №728. У рівняннях, приведених у вправах 725, 726, обчислити корінь, що знаходиться в заданому відрізку (відрізок слідує за рівнянням), методом розподілу відрізка навпіл і методом хорд з однією і тією ж точністю ε . Порівняти кількість кроків, які потрібно зробити для одержання кореня цими методами.

Вправа №729. Дано дійсне позитивне ε . Методом дотичних обчислити з точністю ε (див. підрядкове зауваження до вправи 726) корінь рівняння $f(x) = 0$ (нижче, слідом за рівнянням $f(x) = 0$, у дужках зазначене початкове зближення до кореня):

- а) $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, (2.2);
 б) $\lg x - x = 0$, (4.67);
 в) $1.8x^4 - \sin 10x = 0$, (0.22);
 г) $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$, (-11);
 д) $x^3 - 6x^2 + 20 = 0$, (2.31).

Вправа №730. Вирішити методом дотичних перераховані в попередній вправі рівняння, припиняючи побудову наближень до кореня рівняння $f(x) = 0$ в той момент, коли буде отримано таке наближення $\bar{x}$, для якого $|f(x)| < 0.00001$.

Вправа №731. Дано дійсне позитивне число ε . Методом ітерацій обчислити з точністю ε (див. підрядкове зауваження до вправи 726) корінь рівняння $f(x)=0$ (нижче слідом за рівнянням $f(x)=0$, в дужках вказано початкове наближення до кореня):

- а) $x - \frac{\sin x}{2} - 1 = 0, \quad (0);$
- б) $2x^3 + 4x - 1 = 0, \quad (0,11);$
- в) $x^3 + 12x - 2 = 0, \quad (0.95);$
- г) $5x - 8 \ln x = 8, \quad (4.32);$
- д) $x^3 + x = 1000, \quad (9.42);$
- е) $x - \sin x = 0.25, \quad (1.17);$
- ж) $x^3 - 6x^2 + 20 = 0, \quad (2.25);$
- з) $5x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0, \quad (0.6).$

Вправа №732. Порівняти методи ділення відрізка навпіл, хорд, дотичних і ітерацій, по чергово використовуючи їх для обчислення одного і того ж рівняння. Не залежно від методу побудови наближень до кореня рівняння $f(x)=0$ треба закінчувати, як тільки буде отримано таке наближення $\bar{x}$, для якого $|f(\bar{x})| < \varepsilon$. Значення ε слідє по порядку брати рівним $0.01, 0.001, \dots, 0.0000001$. Для кожного із методів побудувати графік чи стовпчасту діаграму зміни числа необхідних наближень при переході від одного значення ε до другого. В якості рівняння, на якому проводиться порівняння методів, і відрізка, якому належить корінь, потрібно взяти:

- а) $x^3 + x^2 - 3 = 0, \quad [0.6, 1.4];$
- б) $x^5 - x - 0.2 = 0, \quad [0.9, 1.1];$
- в) $5x^3 - x - 1 = 0, \quad [0.6, 0.8];$
- г) $x^3 - 2x - 5 = 0, \quad [1.9, 2.93];$
- д) $x^3 + x = 1000, \quad [9.1, 10];$
- е) $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0, \quad [0, 1].$

Для методу дотичних і ітерацій в якості початкового приближення вибирається підходящий кінець відрізка.

Вправа №733. Дано дійсне додатне число ε . Знайти при допомозі підходящих методів всі корні рівнянь $f(x)=0$ з точністю ε . Для отримання відрізків, які містять по одному кореню рівняння $f(x)$, чи для отримання початкових наближень до корнів дослідити графік функції $y=f(x)$. В якості $f(x)$ розглянути:

- а) $x^3 - 6x^2 + 12x + 5 = 0;$
- б) $x^4 + x^2 - 2 = 0;$
- в) $x^3 + 3x + 2 = 0;$
- г) $\sqrt{x} + 1 = \cos(0.5x);$
- д) $3x^2 - \cos 2x - 1 = 0;$
- е) $2 \ln x - 1/x + 0.5 = 0;$
- ж) $x^4 - 6x_3 + 9x^2 - 16 = 0.$

Вправа №734. Знайти з точністю 0.00001 найменший корінь рівняння:

- а) $x^3 - 6x^2 + 19.8 = 0$;
- б) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 34x - 25 = 0$;
- в) $x^3 - 1.75x + 0.75 = 0$;
- г) $x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = 0$;
- д) $3x + 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = 0$;
- е) $x^8 - 0.4x^3 - 1.24 = 0$;
- ж) $x = \cos x + 1$;
- з) $e^{-x} = 0.5 + \sqrt{x}$;
- і) $x^4 + 39x^3 + 958x^2 - 1081x - 1987 = 0$.

Скористатись яким-небудь придатним чисельним методом розв'язку рівнянь. Для одержання відрізка, що містить найменший корінь рівняння $f(x)=0$, чи для одержання початкового наближення до цього кореня дослідити графік функції $y=f(x)$.

Вправа №735. Повернутися до попередньої вправи, розглядаючи замість найменшого кореня:

- а) найбільший;
- б) найменший негативний;
- в) найбільший додатний;
- г) другий по величині;
- д) найменший по модулю.

Вправа №736. Знайти з точністю 0.0001 усі корені рівняння $1/x = \sin x$, що належить відрізку $[-\pi, \pi]$.

Вправа №737. Для кожного цілого числа n з діапазону від 1 до 50 знайти придатним методом з точністю $1/n^2$ найбільший корінь рівняння $\frac{x^3}{n^2} - 3x^2 + 1 = 0$ (цей корінь, як неважко показати, менше, ніж $3n^2$).

Одержати графічне зображення залежності значення найбільшого кореня від n .

Вправа №738. Іноді функція $y = f(x)$ задається на деякому відрізку за допомогою рівняння виду $F(x, y) = 0$. Обчислити значення функції, заданої рівнянням:

- а) $y^3 + x^3 + 2xy = 0$ для $x=0, -0.1, -0.2, \dots, -1$;
- б) $y^3 + y^2 - x^2 = 0$ для $x=1, 1.1, 1.2, \dots, 2$.

В першому випадку функція визначена і невід'ємна на відрізку $[-1, 0]$, її значення на цьому відрізку менше ніж 1; у другому випадку функція визначена і від'ємна на відрізку $[1, 2]$, її значення на цьому відрізку менше ніж 1.5. для знаходження значень y використати підходящий чисельний метод розв'язку рівнянь. Обчислення проводити з точністю до 0.0001.

Вправа №739. Написати програму рішення по методу Гауса системи лінійних рівнянь

$$a) \ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Квадратна матриця $[a_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$ і вектор $b_1 \dots$, вихідні дані задачі (передбачається, що система сумісна і має єдиний розв'язок).

Застосувати програму для рішення наступних систем:

$$a) \ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13,$$

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14;$$

$$б) \ 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8,$$

$$0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9,$$

$$0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20;$$

$$в) \ 6x_1 - x_2 - x_3 = 11.33,$$

$$-x_1 + 6x_2 - x_3 = 32,$$

$$-x_1 - x_2 + 6x_3 = 42;$$

$$г) \ 3x_1 - x_2 = 5,$$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15;$$

$$д) \ 0.427x_1 + 3.210x_2 - 1.307x_3 = 2.425,$$

$$4.270x_1 - 0.513x_2 + 1.102x_3 = -0.176,$$

$$0.012x_1 + 1.273x_2 - 4.175x_3 = 1.423;$$

$$е) \ 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0,$$

$$x_1 - 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15;$$

$$ж) \ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3.1 = 0,$$

$$0.1x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0,$$

$$0.15x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0,$$

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2.1x_4 + 4.7 = 0;$$

$$з) \ 3x_1 + 1.5x_2 + 2.4x_4 = 6,$$

$$-0.5x_1 + x_2 - 3.1x_3 - 4x_4 = -12,$$

$$2x_1 - 0.8x_2 - x_4 = 1$$

$$x_1 - 1.3x_2 + 3.9x_3 - 3.7x_4 = 3.1;$$

$$и) \ 4.13x_1 - 2.87x_2 - 1.94x_3 + 0.61x_4 = 0.32,$$

$$1.27x_1 + 7.23x_2 - 0.15x_3 + 1.71x_4 = -4.16,$$

$$0.19x_1 + 2.75x_2 + 3.14x_3 - 0.76x_4 = 2.33,$$

$$2.87x_1 + 4.33x_2 - 2.41x_3 - 3.42x_4 = 2.79;$$

$$к) \ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0.5,$$

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 5.4,$$

$$-2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5,$$

$$x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7.5,$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3.3;$$

$$\begin{aligned}
 \text{л)} \quad & 7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 = 6.68, \\
 & 8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.5x_3 + 3.5x_4 = 9.95, \\
 & 4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 = 8.6, \\
 & 3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 8.3x_4 = 1; \\
 \text{м)} \quad & 10.2x_1 + 6.07x_2 - 9.1x_3 + 50.3 = 0, \\
 & 9.28x_1 - 79.6x_2 - 4.92x_3 + 25.8 = 0, \\
 & 68.3x_1 - 2.71x_2 - 8.14x_3 + 32.6 = 0.
 \end{aligned}$$

Вправа №740. Дано дійсне додатне число ε . Методом ітерацій розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь з точністю ε . В даній вправі обчислення з точністю ε означає наступне. Обчислюється послідовність векторів – наближень $x(m) = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, де n – число невідомих системи, $m = 0, 1, 2, \dots$. Якщо для деякого k – виконується умова $\max_i |x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$ $i = 1, 2, \dots, n$, то вектор $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, вважається розв'язком з точністю ε :

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & x_1 = 2 - 0.06x_2 + 0.02x_3, \\
 & x_2 = 3 - 0.03x_1 + 0.05x_3, \\
 & x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2; \\
 \text{б)} \quad & x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\
 & x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\
 & x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.02x_2; \\
 \text{в)} \quad & x_1 = 0.1x_2 - 0.2x_3 + 0.3x_4, \\
 & x_2 = -0.1x_1 + 0.1x_3 - 0.2x_4 + 0.5, \\
 & x_3 = -0.1x_1 - 0.15x_2 + 0.05x_4 - 0.5; \\
 & x_4 = -0.15x_1 - 0.1x_2 - 0.005x_3 + 0.75; \\
 \text{г)} \quad & x_1 = -0.2x_2 - 0.1x_3 - 0.2x_4 - 0.4, \\
 & x_2 = 0.2x_1 - 0.2x_3 + 0.2, \\
 & x_3 = 0.2x_1 - 0.4x_2 + 0.2x_4 - 0.4; \\
 & x_4 = 0.33x_1 - 1.111; \\
 \text{д)} \quad & x_1 = 0.12x_1 - 0.18x_2 + 0.08x_3 - 0.64, \\
 & x_2 = 0.15x_1 + 0.06x_2 - 0.11x_3 + 0.26, \\
 & x_3 = 0.04x_1 - 0.1x_2 - 0.09x_3 + 1.34; \\
 \text{е)} \quad & x_1 - 0.1x_2 + 0.2x_3 = 0.3, \\
 & -0.1x_1 + x_2 - 0.1x_3 - 0.1x_4 = -0.2,
 \end{aligned}$$

$$-0.1x_2+x_3-0.1x_4=0.1,$$

$$-0.1x_2+0.1x_3+x_4=0.2;$$

$$\text{ж)} \quad 5.92x_1-1.24x_2-1.84x_3=2.44,$$

$$2.72x_1-9.714x_2+2.43x_3=2.4,$$

$$1.76x_1-3.12x_2+9.38x_3=1.93.$$

Вправа №741. Вирахувати інтеграли по формулах числового інтегрування і по формулах Ньютона-Лейбниці і порівняти результати:

$$\text{а)} \int_1^2 \frac{dx}{x^2}; \quad \text{б)} \int_1^9 \frac{dx}{x}; \quad \text{в)} \int_0^{\pi/3} \sin x dx;$$

$$\text{г)} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{д)} \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx.$$

Вправа №742. Дано дійсне число ε . Обчислити інтеграл з точністю ε . В даній вправі обчислення з точністю означає наступне. Відрізок інтегрування розбивають на n_i рівних частин і будується сума S_{n_i} , яка є наближеним значенням інтеграла. Якщо виконується умова $|S_{n_{i+1}} - S_{n_i}| < \varepsilon$ $S_{n_{i+1}}$ вважається значенням інтеграла з точністю ε . (Тут $n_i < n_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots$).)

$$\text{а)} \int_0^{1.2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}; \quad \text{б)} \int_0^3 \sqrt{4+x^2} dx; \quad \text{в)} \int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$\text{г)} \int_0^3 e^{-x} \cos \frac{\pi x}{4} dx; \quad \text{д)} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-0.25 \sin^2 x}};$$

$$\text{е)} \int_0^{\pi/6} \sqrt{\tan x} dx; \quad \text{ж)} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx;$$

$$\text{з)} \int_1^7 \frac{e^x}{x} dx; \quad \text{і)} \int_0^{10} (x-5)^2 (10-x) dx;$$

$$\text{к)} \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x} dx; \quad \text{л)} \int_0^1 e^{2x} \sin(2x^2+1) dx;$$

$$\text{м)} \int_{0.2}^{0.56} \arccos e^{-\sqrt[3]{3x}} dx; \quad \text{н)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(4+t^2)}};$$

$$\text{о)} \int_0^5 e^x \sin x^2 dx; \quad \text{п)} \int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{t}} dt.$$

Якщо вдається за допомогою формули Ньютона—Лейбниці знайти точне значення інтеграла, то корисно порівняти з ним результат наближеного обчислення.

Вправа №743. Обчислити довжину еліпса по формулі

$$S = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad a=30, \quad b = 20 \quad (a \text{ і } b \text{ — півосі еліпса}),$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Вправа №744. Повернутися до вправи 738. Знайти наближені значення інтегралів функцій $y = f(x)$, визначених в а) і б) при допомозі рівнянь виду $F(x, y) = 0$. Перша функція інтегрується на відрізку $[-1, 0]$, друга — на відрізку $[1, 2]$. Обчислення інтеграла варто починати, розділивши відрізок інтегрування на 5 частин. Потім уточнити значення інтеграла, зменшуючи крок удвічі. Обчислення проводити з точністю 0.001. Значення функції обчислювати з точністю 0.00001.

Вправа №745. Дано дійсне позитивне число ε . Обчислити з точністю ε площу фігури між дугами двох кривих :

а) $y = \sin x^2 + 2, \quad y = e^{x^2};$

б) $y = 2^{x^2}, \quad y = \cos x^2 + 1.$

Скористатись чисельними методами рішення рівнянь і інтегрування.

Вправа №746. Вирішити диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$. Після рівняння в дужках записані вихідні дані для рішення: x_0 — початкове значення аргументу, y_0 — початкове значення функції від x_0 , відрізок, на якому розв'язується рівняння, h — крок.

а) $y' = x + \cos \frac{y}{\pi} \quad (x_0=1.7, \quad y_0=5.3 \quad [1.7, 5.2], \quad h=0.15);$

б) $y' = \frac{x}{2} + \frac{e^2}{x+y} \quad (x_0=1.8, \quad y_0=4.5 \quad [1.8, 4.6], \quad h=0.1);$

в) $y' = \sqrt[3]{x^2 + 3y} \quad (x_0=3, \quad y_0=5 \quad [3, 11.4], \quad h=0.3);$

г) $y' = \frac{y}{x} (y \ln x - 1) \quad (x_0=1, \quad y_0=0.5 \quad [1, 0.6], \quad h=0.005);$

д) $y' = 2x + \sin \frac{y}{x} \quad (x_0=0, \quad y_0=1 \quad [0, 1], \quad h=0.1);$

е) $y' = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (x_0=0, \quad y_0=0 \quad [0, 1], \quad h=0.1);$

ж) $y' = x + \sqrt[3]{3+y^2} \quad (x_0=0, \quad y_0=0 \quad [0, 1], \quad h=0.1);$

з) $y' = \frac{y}{e^{-x} + y^2} \quad (x_0=0, \quad y_0=1 \quad [0, 1], \quad h=0.01);$

- і) $y' = x - y$ ($x_0 = 0, y_0 = 0$ $[0, 1]$, $h = 0,05$);
- к) $y' = \frac{xy}{1 - x^2}$ ($x_0 = 0, y_0 = 1$ $[0, 0.5]$, $h = 0,05$);
- л) $y' = 2xy$ ($x_0 = 0, y_0 = 1$ $[0, 1]$, $h = 0,025$);
- м) $y' = 2x - 3y$ ($x_0 = 0, y_0 = 0$ $[0, 1]$, $h = 0,1$);
- н) $y' = \sqrt{1 + x^3 + y}$ ($x_0 = 0.8, y_0 = 3.8$ $[0.8, 5.0]$, $h = 0,15$).

§ 23. Випадкові числа

Вправа №747. Якщо записати результати серії кидань монети, то може вийти, наприклад, послідовність:

орел, решка, решка, орел, решка, орел, орел, орел, решка, ...

Позначивши випадання решки одиницею, а випадання орлом-двійкою, одержимо числову послідовність 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, ...

Протокол серії незалежних випробувань, кожне з яких може мати один з n рівномірних результатів (у попередньому прикладі $n=2$), зручно зображувати послідовністю чисел 1, 2, ..., n – номерів випадків. При $n=6$ (таке, наприклад число ходів при киданні гральної кістки) може вийти

5, 4, 2, 1, 4, 3, 6, 6, 5, 2, 5, 6, 1, 3, ...

Подібного роду послідовності на практиці можуть бути використані для підбору вихідних даних для дослідної перевірки деякої гіпотези, багаторазового ухвалення рішення в повторюваній складній ситуації, моделюванні різних фізичних явищ (наприклад, броунівського руху) і т.д. Деякі мови програмування дозволяють включати в програми звертання до так названих датчиків випадкових чисел – операторам або функціям, що виробляють при кожному звертанні черговий член деякої числової послідовності, схожої на розглянуті вище. Звичайно датчики побудовані так, що членами послідовності виявляються дійсні числа $r_0, r_1, \dots$, що належать інтервалу $(0, 1)$. У практичних застосуваннях більшості таких датчиків послідовність $r_0, r_1, \dots$ може розглядатися як послідовність рівномірно розподілених у інтервалі $(0, 1)$ незалежних випадкових чисел, тобто можна вважати, що який би інтервал (a, b) усередині $(0, 1)$ ми не взяли, при $k \geq 0$ імовірність того, що r_k , попадає в (a, b) , не залежить від значень інших членів послідовності і дорівнює довжині $b-a$ цього інтервалу. Як правило, числа $r_0, r_1, \dots$, при роботі з датчиками утворюються зовсім не випадково, а по визначеному закону, лише досить що добре імітує випадковість, тому вірніше говорити про псевдовипадкові числа. Однак для стислості приставку “псевдо” часто опускають, як і згадування про незалежність чисел, і говорять про послідовність випадкових чи чисел випадкової послідовності, уточнюючи, при необхідності, характер розподілу. Так будемо поступати і ми.

Передбачається провести наступні експерименти з датчиком випадкових чисел:

а) Одержати за допомогою датчика 20 чисел і оцінити на око їхню “випадковість” (проконтролювати відсутність помітних закономірностей).

б) Одержати за допомогою датчика 300 чисел $r_0, r_1, \dots, r_{299}$ і оцінити по них рівномірність розподілу: розбити інтервал $(0, 1)$ на 10 інтервалів рівної довжини, побудувати стовпчасту діаграму (гістограму) і секторну діаграму, що показують, скільки чисел з послідовності $r_0, r_1, \dots, r_{299}$, потрапило в кожен інтервал.

Вправа №748. Якщо готового датчика випадкових чисел (див. попередню вправу) у розпорядженні програміста ні, то він може самостійно визначити датчик у програмі. Не вдаючись у досить складну теорію, опишемо один з таких датчиків (див. [35]). Зафіксуємо деякі натуральні a, c, m, s_0 такі, що m – найбільше з них. Визначимо послідовність від’ємних цілих чисел $s_0, s_1, \dots$ наступним правилом: s_n дорівнює залишку від ділення суми $as_{n-1} + c$ на m , і разом з послідовністю $s_0, s_1, \dots$ розглянемо послідовність $r_n = \frac{s_n + 1}{m + 1}$ ($n = 0, 1, \dots$). При вдалому виборі a, c, m, s_0 послідовність $r_0, r_1, \dots$ буде добре імітувати послідовність рівномірно розподілених в інтервалі $(0, 1)$ випадкових чисел. Одним з таких виборів є наступний:

1) $m = 2^k$, де k береться настільки великим, наскільки це можливо (треба мати на увазі, що послідовність $s_0, s_1, \dots$, так само як і послідовність $r_0, r_1, \dots$, буде періодичною з періодом 2^k ; при невеликих значеннях k періодичність буде занадто помітною).

2) При діленні a на 8 повинно одержатись залишок 5. Крім цього, потрібно, щоб виконувалося $\sqrt{m} < a < m - \sqrt{m}$.

3) Число c повинно бути непарним; при цьому бажано, щоб виконувалася наближена рівність $\frac{c}{m} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0,21132\dots$

4) Число s_0 можна вибрати довільно в діапазоні від 0 до $m-1$.

У зв'язку зі сказаним передбачаються наступні завдання:

а) Підібрати кілька варіантів трійок a, c, m , що задовольняють умовам 1) – 3).

б) Знайти ще які-небудь варіанти, що дозволяють добре імітувати випадковість, і на його основі описати новий датчик.

в) Користаючись різними датчиками, серед яких повинні бути датчики, побудовані по запропонованій вище схемі з різним вибором a, c, m, s_0 , і “саморобні”

датчики, побудовані на інших засадах, потрібно провести експерименти, описані в попередній задачі.

Вправа №749. Датчики випадкових чисел знаходять цікавіше застосування в обчисленні площ і об’ємів: на цьому застосуванні заснований відомий метод Монте-Карло (пояснення походження назви і докладний виклад самого методу з численними прикладами додатків мається, наприклад, у

[47]). Нехай задана фігура M , що цілком лежить усередині одиничного квадрата, і нехай потрібно обчислити її площу. Нехай в одиничному квадраті обрано навмання n крапок (Рис. 42) і нехай $v(n)$ – число крапок, що потрапили усередину M . Тоді геометрично ясно, що при великих n площа фігури M буде приблизно дорівнює $v(n)/n$ і чим більше буде n , тим ближче ми підійдемо до дійсного значення площі. У якості обраних “навмання” крапок у цих обчисленнях можна взяти крапки з координатами $(r_0, r_1), (r_2, r_3), \dots$, де в ролі $r_0, r_1 \dots$ виступають числа, одержувані за допомогою датчика випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $(0, 1)$. Аналогічно, беручи точки з координатами $(r_0, r_1, r_2), (r_3, r_4, r_5)$, можна обчислювати об’єми тіл, що повністю лежать усередині одиничного куба (Рис. 43).

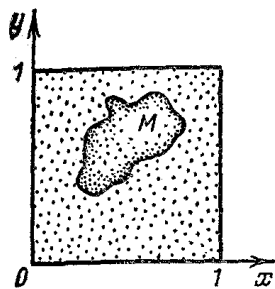


Рис. 42

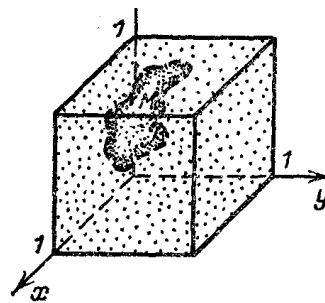


Рис. 43

У зв'язку з методом Монте-Карло пропонуються наступні завдання. Скориставшись декількома датчиками (у крайньому випадку одним датчиком):

а) визначити площу круга $(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 1/4$; для цього знайти по 200 точок за допомогою кожного з датчиків; відповіді порівняти з $\pi/4$;

б) визначити об’єм кулі $(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 < 1/4$; для цього знайти по 200 точок за допомогою кожного з датчиків; відповідь порівняти з $\pi/6$.

Вправа №750. Випадкова числова послідовність $r_0, r_1 \dots$, члени якої рівномірно розподілені в інтервалі $(0, 1)$, може бути використана для побудови випадкової послідовності $v_0, v_1, \dots$, члени якої належать кінцевій множині, яка складається з елементів $x_1, \dots, x_n$.

Елементи $x_1, \dots, x_n$ повторюються в послідовності $v_0, v_1, \dots$ із заданими частотами, відповідно рівними $p_1, p_2, \dots, p_n$ (тобто відносно послідовності $v_0, v_1, \dots$ можна вважати, що x_i зустрічається в ній із ймовірністю p_i ($i=1, \dots, n$), $p_1 + \dots + p_n = 1$). Послідовність $v_0, v_1, \dots$ будемо називати випадковою послідовністю

с розподілом $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$. Для побудови $v_0, v_1, \dots$ використовується

наступний прийом [47]. Інтервал $(0, 1)$ розбиваємо на n інтервалів, довжини яких рівні $p_1, \dots, p_n$. Координатами точок розбиття будуть $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots, p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$. Отримані інтервали позначаємо через $I_1, \dots, I_n$. Тепер перебираємо числа, і якщо чергове число r_k попадає в інтерн I_j ($1 \leq j \leq n$), то в якості v_k беремо x_j (у силу рівномірного розподілу членів послідовності

$r_0, r_1, \dots$, в інтервалі $(0, 1)$ імовірність попадання r_k у деякий інтервал дорівнює довжині цього інтервалу). Якщо раптом виявиться, що r_k збігається з точкою розбивки (кінцем інтервалу), то можна умовно вважати, що число r_k попа в інтервал, що лежить праворуч від нього.

Передбачаються наступні завдання, у яких скористатися датчиком випадкових чисел:

а) Побудувати 100 перших членів випадкової послідовності з нулів і одиниць, у якій нуль і одиниця рівноймовірні, тобто, послідовності з розподілом $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

б) Побудувати 100 перших членів випадкової послідовності з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, у якій усі цифри рівноймовірні, тобто послідовності з розподілом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

в) Побудувати 100 перших членів випадкової послідовності з нулів і одиниць, у якій нуль зустрічається з імовірністю $1/4$, а одиниця з імовірністю $3/4$, тобто послідовності з розподілом тобто $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

г) Побудувати 100 перших членів випадкової послідовності зі слів “камінь”, “ножиці”, “папір”, у якій ці три слова рівноймовірні, тобто послідовності з розподілом тобто $\begin{pmatrix} \text{камінь} & \text{ножиці} & \text{папір} \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

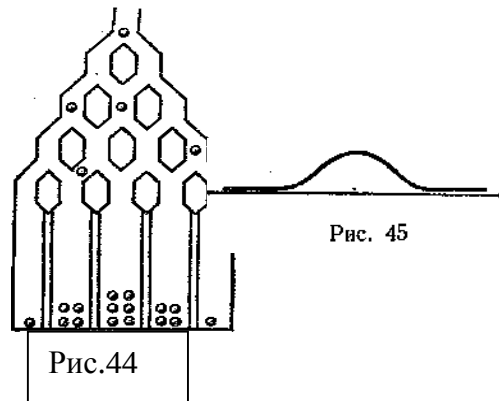
(Цю послідовність можна використовувати для вибору ходів у відомій грі “камінь, ножиці, папір”

д) Побудувати 100 перших членів випадкової послідовності зі слів “камінь”, “ножиці”, “папір”, у якій слово “камінь” зустрічається з імовірністю $1/3$, слово “ножиці” – з імовірністю $1/2$, слово “папір” – з імовірністю $1/6$, тобто послідовності з розподілом $\begin{pmatrix} \text{камінь} & \text{ножиці} & \text{папір} \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$.

(Цю послідовність можна використовувати для вибору ходів у відомій грі “камінь, ножиці, папір” з наступною системою премій: коли “камінь” тупить “ножиці”, присуджується одне очко, коли “ножиці” ріжуть “папір”, присуджується два очка, і коли “папір” покриває “камінь”, присуджується три очка.) *).

*) Зазначені в завданнях г) і д) стратегії чергування ходів, засновані на випадкових послідовностях, є в оптимальними. Див. про це, наприклад, у книзі [33].

Вправа №751. Для наочної демонстрації деяких законів імовірностей використовується прилад, називаний дошкою Гальтона (Рис. 44). Металеві



кульки по черзі попадають у верхній канал; зустрівши перешкоду, вони повинні вибрати шлях чи ліворуч чи праворуч, потім відбувається другий вибір і т.д. Кожний з виборів випадковий, кожна з імовірностей вибору шляху ліворуч і праворуч дорівнює $1/2$. При достатньо високій якості приладу картина, що спостерігається, розподілу кульок у нижніх відділах дошки Гальтона добре погоджується з імовірнісними розрахунками, по яких кількості кульок, що потрапили у відділення, пронумерованих числами..., m (на Рис. 44 $m = 5$), повинні бути пропорційні (з деяким коефіцієнтом пропорційності, що залежить від загального числа кульок) числам з m -ого рядка трикутника Паскаля (див. вправу 555). Крива, що огинає верхівки стовпців з кульок, повинна мати колоподібну форму (Рис. 45). Шлях кульки по дошці Гальтона, що містить m нижніх відділів, можна зобразити групою з m нулів і одиниць: нуль зображає вибір шляху вліво, одиниця – праворуч. Одержавши при допомозі датчика випадкових чисел mn членів випадкових послідовностей $v_0, v_1, \dots$ з нулів і одиниць з розподілом

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (див. вправу 750 а) і взявши групи $(v_0, \dots, v_{m-1}), (v_m, \dots, v_{2m-1}), \dots,$

$(v_{(n-1)m}, \dots, v_{nm})$, ми одержимо зображення шляхів n уявних кульок. Номер відділення, у яке попадає кулька, визначається по кількості одиниць у зображенні маршруту. Нехай дано натуральні n і m ($n \geq 2^m$). Потрібно підрахувати, виходячи з моделі, що заснована на датчику випадкових чисел, кількість уявних кульок, що потрапили в кожне з відділень. Побудувати графічні представлення результатів підрахунку (коло подібність діаграми чи графіка буде говорити про гарну якість датчика).

Вправа №752. Датчики випадкових чисел можуть використовуватися для побудови на обчислювальних машинах моделей складних фізичних явищ. Нехай маються дві закриті посудини, перший з яких наповнений газом, а другий порожній, Посудини з'єднані трубою, перекритою клапаном. Після того як клапан відкривають, молекули газу будуть прагнути перейти з області з

більш високим тиском в область з більш низьким тиском. Але взаємні зіткнення молекул і їх зіткнення зі стінками посудин і трубки будуть приводити до того, що кожна з молекул може змінити свій рух на протилежне, тому картина вирівнювання тисків у першій і другій посудинах буде непростою. На початку XX століття фізики П. і Т. Еренфести описали цікаву модель цього явища. Перша посудина наповнена великою кількістю пронумерованих куль, а друга посудина порожня. Третя посудина наповнена квитками, пронумерованими так само, як і кулі. Витягається довільний квиток, потім відшукується куля з витягнутим номером і ця куля перекладається з тієї посудини, у якій він знаходився, в іншу посудину. Потім білетик повертається в третю судину і процедура відновляється. Модель П. і Т. Еренфестов дуже зручно реалізується програмою. Розподіл n уявлених куль по двох посудинах може бути описано, наприклад, масивом з n елементами, рівними -1 (куля в першій посудині) і 1 (куля в другій посудині). Витягування куль легко замінити одержанням членів випадкової послідовності з розподілом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & & 1/n \end{pmatrix}$ (див. вправу 750); величину n бажано брати якнайбільше, не менш 1000. Побудувати графік чи діаграму, відзначаючи відношення кількостей куль у посудинах через кожні 100 кроків.

Вправа №753. Датчики випадкових чисел можна залучати при підборі перевірочних вихідних даних для програм.

Одержати за допомогою датчика випадкових чисел:

- а) 25 дійсних чисел, що лежать у діапазоні від -50 до 50 ;
- б) 30 цілих чисел, що лежать у діапазоні від -20 до 20 ;
- в) 20 невід'ємних дійсних чисел, що не перевершують 40 ;
- г) 35 невід'ємних цілих чисел, що не перевершують 1000 ;
- д) 27 натуральних чисел, що не перевершують 20 ;
- е) натуральне n , що не перевершує 30 , і n дійсних чисел, що лежать у діапазоні від -100 до 100 ;
- ж) натуральні n , m , що не перевершують 20 ; n цілих чисел, що лежать у діапазоні від -150 до 150 ; m невід'ємних дійсних чисел, що не перевершують n ;
- з) 15 чисел, серед яких 7 двійок і 8 трійок; .
- і) перестановку чисел $1, \dots, 12$, тобто послідовність чисел $p_1, \dots, p_{12}$, у яку входить кожне з чисел $1, \dots, 12$;
- к) 28 малих латинських букв;
- л) 5 неповторюваних малих латинських букв.

Вправа №754. Можливо, що при розв'язуванні задачі на обчислювальній машині прийдеться спочатку одержувати члени випадкової послідовності

з деяким розподілом $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & & p_n \end{pmatrix}$ (див. вправу 750), а потім перейти до

послідовності з якимсь іншим розподілом. Розглянемо, наприклад, схему такої програми перевірки знань (точніше, програми-тренажера), що випадково пропонує питання з деякого набору питань $x_1 \dots, x_n$. Питання вибирається випадково, спочатку всі питання рівноправні і розподіл є $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1/n & & 1/n \end{pmatrix}$. Далі можна дотримувати наступної стратегії. Якщо на питання p_i , що пропонувався найпершим, була отримана правильна відповідь (правильність установлюється порівнянням отриманої відповіді з відомою відповіддю), то це питання виключається з набору питань і відбуваються перехід до розподілу

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_n \\ 1/(n-1) & & 1/(n-1) & 1/(n-1) & & 1/(n-1) \end{pmatrix} \text{ якщо}$$

відповідь була неправильною, то оголошується правильна відповідь і відбувається перехід до

$$\text{розподілу} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_n \\ 1/(n+1) & & 1/(n+1) & 2/(n+1) & 1/(n+1) & & 1/(n+1) \end{pmatrix} \text{ тобто}$$

якби вважається, що набір тепер містить $n+1$ запитання, два з яких збігаються (x_i входить у набір із кратністю 2). У результаті цього важке запитання буде пропонувати надалі частіше, ніж більш легкі. Після кожної отриманої відповіді розподіл міняється так, що якщо був запропоновано питання, що має кратність k ($k > 0$) і на нього була отримана правильна відповідь, то k зменшується на 1; якщо ж була отримана неправильна відповідь, то k збільшується на 1. Якщо в результаті зменшення на 1 виявилось, що $k=0$, то питання виключається з набору. Знання може бути оцінене по кількості питань, даних до того моменту, коли набір питань став порожнім. Реалізувати цю стратегію в програмі перевірки знання, таблиці множення на 7 чи перевірки знання перекладів деякої кількості англійських (французьких, німецьких, ...) слів.

§ 24. Обчислення з деякою точністю

Вправа №755. Дано дійсні числа x, ε ($x \neq 0, \varepsilon > 0$). Обчислити з точністю ε *):

$$\begin{aligned} \text{а)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}; & \text{б)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+3}}{(2k+1)!(4k+3)}; \\ \text{в)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+1}}{(2k)!(4k+1)}; & \text{г)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((k+1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)}; \end{aligned}$$

*) Зміст цього виразу стосовно до нескінченних сум був пояснений в умові вправи 119.

$$д) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)}; \quad е) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)} \left(\frac{x}{3}\right)^{4k};$$

$$ж) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)(2k+1)!}; \quad з) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$

Вправа №756. Дано дійсні числа x, a, ε ($\varepsilon > 0, |x| < 1$).

Вправа №757. Дано ціле число n , дійсні числа x, ε ($\varepsilon > 0, n \geq 0$). Обчислити з

точністю ε значення $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$.

Вправа №758. Дано дійсне число x . Обчислити з точністю 10^{-6} :

$$а) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^3 k^2};$$

$$б) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^3}$$

$$в) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^{3/2}};$$

$$г) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|} + k^2};$$

$$д) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{k^3};$$

$$е) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^3 + k\sqrt{|x|} + 1};$$

$$ж) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k};$$

$$з) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{3}\right)^{4k+2}.$$

Вправа №759. Дано дійсні числа x, ε ($\varepsilon > 0, x \neq 0$). Обчислити з точністю ε нескінчену суму і вказати кількість врахованих доданків:

$$а) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{2k!};$$

$$б) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+2}}{(k+1)(k+2)};$$

$$в) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)x^k}{3^k};$$

$$г) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k+1)^2}.$$

Вправа №760. Дано дійсне число x . Послідовність $a_1, a_2, \dots$, утворена по такому закону:

$$а) a_n = \frac{x^n}{(2n)!};$$

$$б) a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)(n+2)};$$

$$в) a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}(n+2)!};$$

$$г) a_n = \frac{x^{2n} \sin(x^n)}{n^2}.$$

Одержати $a_1 + \dots + a_k$, де k – найменше ціле число, що задовольняє двом умовам: $k > 0$ і $|a_{k+1}| < 10^{-5}$.

Вправа №761. Дано дійсне число ε ($\varepsilon > 0$). Обчислити $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos^3(3^{n-1})$, врахувавши тільки ті доданки, в яких множник $1/3^n$ має величину не меншу, ніж ε .

Вправа №762. Дано дійсне число ε ($\varepsilon > 0$). Послідовність $a_1, a_2, \dots$ утворена по такому закону:

$$\text{а) } a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}};$$

$$\text{б) } a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n+1});$$

$$\text{в) } a_n = (1 - \frac{1}{2!})(1 + \frac{1}{3!}) \dots (1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)!});$$

$$\text{г) } a_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \dots \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}}_{n \text{ коренів}} \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Знайти перший член a_n ($n \geq 2$) для якого виконується умова $|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$.

Вправа №763. Дано дійсні числа x, ε ($\varepsilon > 0$). Послідовність $a_1, a_2, \dots$ утворена по такому закону: $a_1 = x$; далі, для $n = 2, 3, \dots$ виконується:

$$\text{а) } a_n = \sqrt{4a_{n-1}^2 - 2x};$$

$$\text{б) } a_n = \frac{16 + x}{1 + |a_{n-1}^3|} + 3a_{n-1};$$

$$\text{в) } a_n = 2a_{n-1} + \frac{x}{4 + a_{n-1}^2};$$

$$\text{г) } a_n = 23 + \frac{1}{2^{n-1}} \cos^2(a_{n-1} - x).$$

Знайти перший член a_n ($n \geq 2$) для якого виконується умова $|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$ (обмежитись розглядом перших 10^4 членів).

Вправа №764. Розглянемо послідовність $d_0, d_1, \dots$ периметрів вписаних в дане коло многокутників з подвоєним числом сторін. Радіус кола – дане дійсне число r . Перший з розглядуваних многокутників – шестикутник. Обчислити d_n ($n > 0$), для якого $|d_n - d_{n-1}| < 10^{-6}$.

Вправа №765. Дано дійсні числа x, ε ($\varepsilon > 0, 0 < x < 1$). Обчислити з точністю ε значення $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k^2)}$.

Вправа №766. Дано дійсні числа a, b, ε ($a > b > 0, \varepsilon > 0$). Послідовності $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ утворені по такому закону: $x_1 = a, y_1 = b$, $x_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + y_{k-1}), y_k = \sqrt{x_{k-1}y_{k-1}}$. Знайти перше x_n , таке що $|x_n - y_n| < \varepsilon$.

Вправа №767. Дано дійсні числа a, b . Послідовності $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ утворені по такому закону: $x_n = a + b \cos(0.5n), y_n = 0.5an - b \sin(0.5n)$. Одержати x_k/y_k де k – найбільше натуральне число, що задовольняє дві умови: $k \leq 20$ і $|y_k| > 10^{-3}$.

§ 25. Фізика

Вправа №768. Група паралельно з'єднаних опорів, зображених на Рис. 46, а, задається невід'ємними числами $r_1, r_2, \dots, r_i$ значеннями опорів.

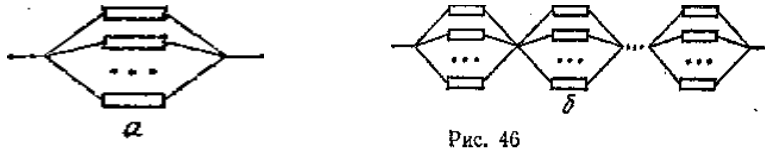


Рис. 46

Послідовне з'єднання ряду таких груп, показане на Рис. 46, б, задається так: спочатку йдуть значення опорів, що входять у першу групу, потім – деяке від'ємне число, потім – значення опорів, що входять у другу групу, потім – деяке від'ємне число і т.д. Після значення останнього опору останньої групи йдуть два від'ємні числа, розрахувати опір з'єднання.

Вправа №769. Аналогічно попередній задачі, розрахувати опір паралельного з'єднання послідовних груп (Рис. 47), знову припускаючи, що кожна група задається рядом значень опорів, за яким йде від'ємне число, а слідом за значенням останнього опору останньої групи йдуть два негативних числа.

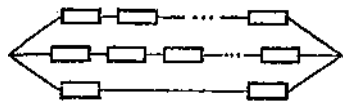


Рис. 47

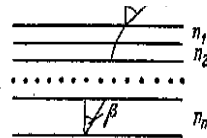


Рис. 48

Вправа №770. Прозора пластина складається з m шарів, показники заломлення яких $n_1, \dots, n_m$. Промінь входить у пластину з вакууму під даним кутом α (Рис. 48). Знайти кут β , під яким промінь перетинає останній шар.

Вправа №771. На воду опущена куля радіуса r , виготовлений з речовини густини ρ ($\rho < 1$). Знайти відстань центру кулі від поверхні води.

Вправа №772. На прямій знаходяться три позитивних заряди q_1, q_2, q_3 , так, як показано на Рис. 49.

Визначити відстані від заряду q_1 до точок, в яких рівнодіючих сил відштовхування зарядами q_1, q_2, q_3 , деякого четвертого позитивного заряду дорівнює нулю.

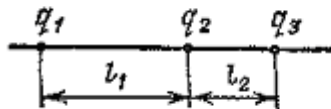


Рис. 49

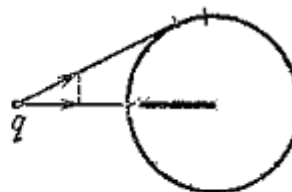


Рис. 50

Вправа №773. Знайти силу, з яким точковий заряд $q=10^{-9}\text{Кл}$ притягається до тонкого непровідного кільця радіусу $R=0.1\text{ м}$. Заряд розташований у площині кільця. Кільце рівномірно по всій довжині заряджене з щільністю заряду $\nu = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$. Відстань від заряду до кільця дорівнює $l=0.1\text{м}$.

Електрична стала дорівнює $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}}$. Для обчислень розбити кільце на 100 рівних частин і вважати кожен частину точковим зарядом величини $\nu \frac{2\pi R}{100}$. Розглянути проекції кулонівських сил на пряму, що з'єднує заряд q з центром кільця (Рис. 50).

Вправа №774. “Крива погоня”. У точці P знаходиться собака в точці Q – заєць. Відстань від P до Q дорівнює 100 м (Рис. 51)

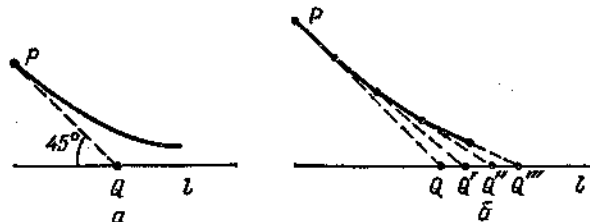


Рис. 51

Заєць біжить уздовж прямої l , що утворює кут 45° з відрізком PQ , з постійною швидкістю $5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Собака біжить увесь час у напрямку зайця зі швидкістю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Знайти траєкторію руху собаки протягом 10 с . Для наближеного рішення пропонується замінити криву ламаною лінією. Вважається, що в першу секунду заєць пробігає відрізок QQ' , собака – PP' , у другу секунду заєць пробігає відрізок $Q'Q''$ і т. д; собака приймає рішення про напрямок погоні рівно один раз у секунду (рис. 51,6).

Вправа №775. Повернутися до попереднього задачі. Обчислити наближено (заміною кривої на ламану) довжину траєкторії собаки, розглядаючи перші 15 с погоні.

Вправа №776. Нехай на площині заданий кут AOB й з деякої точки P усередині кута випущена більярдна куля, яка відбивається від сторін кута як від бортів по закону кут падіння дорівнює куту відбивання”. Довести, що

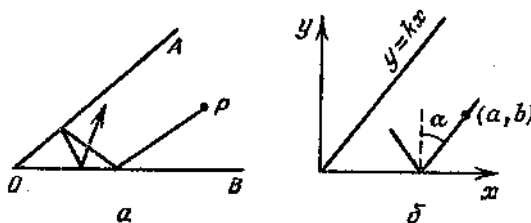


Рис. 52

після декількох відбиттів куля почне віддалятися від вершини кута (Рис. 52, а). Ця обставина пояснює труднощі гри на більярді: кут більярду не зтягує, а віддаляє кулю.

Нехай сторона OB збігається з невід'ємною частиною осі абсцис, а сторона OA з тією частиною прямої $y = kx$, що лежить у верхній напівплощині. Нехай координати точки P суть дійсні числа a, b такі, що $a > 0$, $0 < b < ka$; нехай відомий перший кут падіння α (Рис. 52, б). По k, a, b знайти всі точки відбиття променя, абсциси яких менше a .

Вправа №777. Прямокутне хокейне поле розміру $a \times b$ освітлено n рядами ламп, по m ламп у ряді, розташованих на висоті h від поверхні льоду. Відстань між рядами ламп дорівнює $a/(n-1)$, відстань між лампами в ряду – $b/(m-1)$. Визначити освітленість хокейного поля в точці, відстані від якої до бортів відповідно рівні a_1, b_1 ($a_1 \leq a, b_1 \leq b$). Потужність ламп – 200 Вт , ккд ламп – 1% .

Вправа №778. “Лист Робіна Гуда в'язню замка Ноттингему” Лист прив'язується до каменю, а камінь кидком посилається через бійницю стіни замка у вікно темниці, положення будівель і відомі величини вказані на Рис. 53. Ріст Робіна Гуда – 1.6 м .

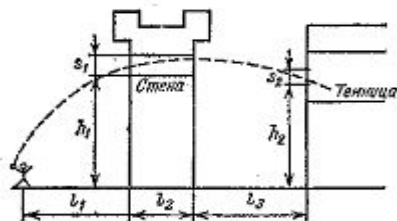


Рис. 53

Чи можна закинути камінь з листом у вікно? Якщо так, то з якою початковою швидкістю і під яким кутом повинний кинути камінь Робін Гуд? У розрахунках зневажати опором повітря.

Вправа №779. Між двома провідними паралельними площинами розташований заряд 10^{-6} Кл , відстань між площинами дорівнює 0.1 м , відстань від заряду до найближчої площини дорівнює 0.01 м . Обчислити силу, яка діє на заряд. Багаторазове застосування методу відбиття, відповідно до якого провідну площину можна замінити зарядом протилежного знака, розміщеним на тій же відстані, але з іншої сторони площини, приводить до сумування двох нескінчених числових рядів (один з додатними членами, другий з від'ємними). Це сумування можна виконати наближено, перетворивши попередньо два ряди в один.

Вправа №780. У стінці циліндричного відра просвердлено n маленьких отворів діаметр кожного з яких дорівнює d . Інші величини відзначені на Рис. 54. Відомо, що $nd < D$. Відро наповнене доверху водою. Необхідно визначити час, за який рівень води у відрі опуститься до нижнього отвору. При обчисленні скористатись тим, що швидкість витікання води через отвір, що знаходиться на глибині x , дорівнює $\sqrt{2gx}$.

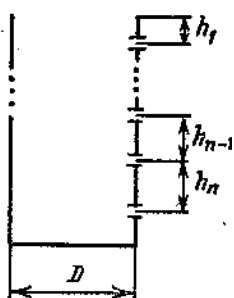


Рис. 54

Вправа №781. До вертикальної стіни на деякій висоті від підлоги притиснутий гімнастичний обруч. Зі стіни виступають два цвяхи, дотикаючись до обруча із внутрішньої сторони. Відомі значення кутів φ_1, φ_2 , відмічених на Рис. 55, а. Визначити, чи буде обруч зберігати своє положення, якщо відпустити його.

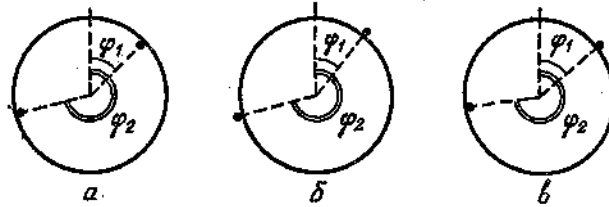


Рис. 55

Вправа №782. Вправа аналогічна попередньої, з тією різницею, що

- а) цвяхи стикаються з обручем із зовнішньої сторони (Рис. 55, б);
- б) перший цвях стикається з обручем із зовнішньої сторони, а другий з внутрішньої (Рис. 55, в).

Вправа №783. Ракета стартує вертикально нагору з поверхні Землі. Маса ракети без палива дорівнює 10 т , запас палива $M = 50\text{ т}$. Відомо, що за кожну секунду польоту згоряє 50 кг палива. Швидкість вильоту із сопла часток згорілого палива постійна щодо ракети і дорівнює $10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. На якій висоті виявиться ракета через 100 с і через 1000 с польоту? Яка швидкість ракети в ці моменти? (Маса Землі дорівнює $6 \cdot 10^{21}\text{ т}$, радіус Землі – 6400 км , гравітаційна постійна в законі всесвітнього тяжіння дорівнює $6.6 \cdot 10^{-34} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}^2}$, опором повітря зневажаємо.) Для обчислення розглянути величини M_n, h_n, v_n – відповідно масу невитраченого палива, висоту підйому і швидкість руху через n секунд польоту; знайти наближені вирази M_n, h_n, v_n через $M_{n-1}, h_{n-1}, v_{n-1}$.

Вправа №784. Мається сферична лінза (радіус сфери R) діаметр якої

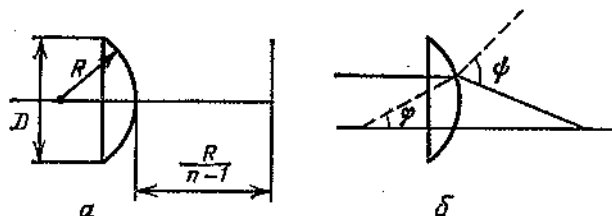


Рис. 56

дорівнює D . Показник заломлення матеріалу, з якого зроблена лінза, рівний n . На відстані $l = R/(n+1)$ від лінзи встановлений екран (Рис. 56, а). На лінзу падає пучок паралельних променів. Визначити діаметр світлової плями на екрані. Характер переломлення променів вказаний на рис. 56, б; в цій ситуації $\sin \varphi' = n \sin \varphi$.

§ 26. Біологія

Вправа №785. У кроликів чорне фарбування (обумовлена алелем B) домінує над білою (обумовленою алелем b). Дані сполучення алелей B і b у генотипах кролики-батьків, кожне зі сполученням BB , Bb чи bb . Застосовуючи закони Менделя, перелічити можливості для сполучень алелей B і b у генотипі нащадка першого покоління (F_1 цієї пари. Разом з кожним можливим сполученням вказати фарбування нащадка.

Вправа №786. . Кожний із двох підданих схрещуванню сортів гороху мав або жовті, або зелені сім'ядолі. Відомо, що жовте фарбування сім'ядолі (алель R) домінує над зеленою (алель r). Серед рослин F_1 (див. попередню вправу) малося n з жовтими сім'ядолями і m з зеленими ($n \geq 0$, $m \geq 0$). Використовуючи закони Менделя, перелічити найбільш ймовірні можливості сполучень алелей R і r у генотипах батьків.

Вправа №787. Повернемося до сортів гороху з жовтими (алель R) і зеленими (алель r) сім'ядолями (див. попередню вправу). Були піддані схрещуванню дві рослини, одна з яких мала зелені сім'ядолі. У результаті схрещування одержали m рослин F_1 (див. вправу 785) з жовтими сім'ядолями і n – з зеленими ($n \geq 0$, $m \geq 0$). Використовуючи закони Менделя, вказати найбільш ймовірне сполучення алелей R і r у генотипі другого батька і в генотипах кожного з рослин F_1 .

Вправа №788. Два сорти пшениці розрізняються стійкістю до певного пестициду (ядохімікату). Робиться припущення, що в гетерозиготній рослині виявляє свою дію тільки один алель – стійкості чи нестійкості до даного пестициду, тобто має місце явище домінування. Узято дві рослин-одна стійка, інша нестійка. У результаті схрещування цих рослин з'явилося кілька стійких рослин F_1 і кілька нестійких. Проведені також зворотні схрещування вихідних рослин із двома рослинами F_1 з яких одна було стійкою до пестициду, а інше – ні. Результати цих чотирьох зворотних схрещувань відомі і записані чотирма парами невід'ємних цілих чисел (перше число пари вказує кількість рослин, стійких до пестициду, других – нестійких). Чи підтверджують результати проведених досвідів гіпотезу про домінування? Якщо так, то який з ознак (стійкість чи нестійкість) є домінуючим?

Вправа №789. “Контакти першого і другого порядку в епідеміології”. Припустимо, що k чоловік занедужали інфекційною хворобою. Другу групу з l чоловік опитали з метою з'ясування, хто з них мав контакт із хворими. Потім опитали третю групу з m чоловік, щоб виявити контакт із ким-небудь з l чоловік другої групи. Результати першого опитування записані у вигляді матриці $[a_{ij}]_{i=1,\dots,k; j=1,\dots,l}$ так, що $a_{ij}=1$, якщо j -ий чоловік другої групи знаходився в контакті з i -м хворим з першої групи, і $a_{ij}=0$ у протилежному випадку. Аналогічно визначена матриця $[b_{ij}]_{i=1,\dots,l; j=1,\dots,m}$ $b_{ij}=1$, якщо j -ий

чоловік третьої групи знаходився в контакті з i -ою людиною з другої групи, і $b_{ij} = 0$ у протилежному випадку. Ці дві матриці описують схему контактів першого порядку між групами. Можуть становити інтерес непрямі контакти, чи, інакше кажучи, контакти другого порядку між людьми третьої групи і хворими першої групи. Виходячи з двох згаданих матриць, одержати матрицю $[c_{ij}]_{i=1,\dots,k; j=1,\dots,m}$ контактів другого порядку.

Вправа №790. Реакція організму на ліки через n годин після ін'єкції виражається показником r_n , вимірюваним у придатних одиницях. Експериментально встановлено, що для лікарських препаратів деякої групи показник реакції є $r_n = \alpha r_{n-1} + 0.4^n$, де $r_0=1$, а α – менше одиниці дане позитивне число, що характеризує конкретний препарат групи. Визначити, через скільки годин настає максимальна реакція на введення препарату. Після скількох година реакція понизиться нижче 50% початкового рівня r_0 ?

Вправа №791. У процесі лікувального голодування маса пацієнта за 30 днів знизилася з 96 до 70 кг. Було встановлено, щоденна утрата маси пропорційна масі тіла. Обчислити, чому дорівнює маса пацієнта через k днів від початку голодування для $k = 1, 2, \dots, 29$.

Вправа №792. Якщо культура кліток у поживному середовищі не підлягала зовнішнім впливам, то приріст маси протягом $(n+1)$ -ї години виявляється вдвічі більше приросту протягом n -ї години. Однак у дослідницьких цілях до зростаючого маси після закінчення кожної години додається по 2 г культури.

Дано натуральне число k . Знайти масу x_k у кінці k -ої години дослідження, якщо спочатку було взято 3 г. (Виходячи з припущення, що при відсутності зовнішнього впливу маса x_n наприкінці n -ої години дослідження задовольняє співвідношенню $x_n - \alpha x_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) для деякої постійної величини α .)

Вправа №793. В одній великій череді, що складається з тварин одного віку і статі, ріст тварин, виміряний у сантиметрах, коливається від k до l (дані натуральні числа).

а) Нехай m і n —дані натуральні числа такі, що $k \leq m < n \leq l$. Яких тварин у череді більше – з ростом, близьким до m см, чи з ростом, близьким до n см?

б) Якщо r – кількість їжі, що споживається за добу твариною з ростом k , то яка приблизно кількість їжі, споживане за добу твариною з ростом l ? Якщо s —кількість вовни, що зістригається щорічно з тварини з ростом k , то скільки приблизно вовни можна щорічно зістригати з тварини з ростом l ? (Передбачається, що густина і довжина вовни не залежать від росту.)

Вправа №794. Числа Фібоначчі $u_0, u_1 \dots$ (див. вправу 144 одержали назву на честь італійського математика XIII століття Леонардо Фібоначчі, що ввів їх у опис чисельності поколінь тварин (без обліку смертності). Передбачається, що кожна пара тварин деякого виду приносить

щорічно приплід в одну пару тварин (самку і самця), які у свою чергу починають давати приплід через два роки після народження. Якщо мається одна пара новонароджених тварин, то, як можна показати, що через n років будемо мати u_{n+1} пар тварин. Внести в цю модель уточнення, що стосується смертності. Вважати, що тривалість життя тварини:

а) 5 років;

б) m років, де m —дане натуральне число,

Обчислити кількість пар тварин, що будемо мати через n років (n — дане натуральне число).

Вправа №795. Для опису чисельності популяції, що відбувається з часом, зручно розглядати розподіл популяції по вікових групах (у першу групу попадають всі особи у віці до року, у другу — всі ті, що не потрапили в першу групу особи, вік яких менше двох років, і т.д.). Нехай у першу вікову групу входить p_1 осіб, у другу — p_2 осіб і т.д. Смертність дуже спрощено можна врахувати, припустивши, що всі особи вимирають, знаходячись у n -ій віковій групі, де n — деяке фіксоване натуральне число. Ясно, що загальне число осіб у популяції є $p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Для кожної вікової групи мається свій коефіцієнт народжуваності; якщо коефіцієнти для розглянутих вікових груп відповідно рівні $b_1, \dots, b_n$ то річний приріст, обумовлений присутністю в популяції i -ої вікової групи з чисельністю p_i , є $b_i p_i$. Таким чином, річний приріст по всій популяції є $b_1 p_1 + \dots + b_n p_n$. У той же час особи, що належать i -ій віковій групі, через рік перейдуть у $(i+1)$ -у вікову групу ($i=1, \dots, n-1$), а особи, що належать n -ій віковій групі, вимруть протягом року. Тому через рік розподіл популяції по вікових групах буде наступним: $b_1 p_1 + \dots + b_n p_n, p_1 + \dots + p_{n-1}$.

Дано натуральні числа n, m , дійсні числа $b_1, \dots, b_n$, невід'ємні цілі числа $p_1, \dots, p_n$. Вважаючи, що $p_1, \dots, p_n$ — початково зареєстрований розподіл популяції по вікових групах, а $b_1, \dots, b_n$ — коефіцієнти народжуваності для вікових груп, визначити загальну чисельність популяції через m років.

Вправа №796. Описану в попередній вправі модель зміни чисельності популяції можна зробити більш точною, ввівши крім коефіцієнтів народжуваності, ще і коефіцієнтів народжуваності $s_1, \dots, s_n$ ($0 \leq s_i < 1, i = 1, \dots, n$) для усіх вікових груп: вважаємо, що якщо в поточному році i -а вікова група має чисельність p_i , то в наступному році $(i+1)$ -а вікова група буде мати чисельність рівну $s_i p_i$ ($s=1, \dots, n-1$). При цьому $s_n = 0$ (тому що ми як і раніше вважаємо, що вік особи не перевершує n років), і фактично можна розглядати тільки $s_1, \dots, s_{n-1}$. Річний приріст за рахунок i -ої групи у цій моделі вважається рівним $b_i s_i p_i$ ($i=1, \dots, n-1$). Коефіцієнти виживання, так само як і коефіцієнт народжуваності, виводяться на основі багаторічних спостережень за популяціями даного виду.

Вважаючи заданими $s_1, \dots, s_{n-1}$, знову розглянути вправу розрахунку чисельності популяції через m років.

Вправа №797. Доповнюючи модель, що була описана в попередній вправі, припустимо, що коли чисельність популяції виявляється під кінець року більшою, ніж деяке число l , то через велику скупченість починається епідемія, що приводить до зниження вдвічі коефіцієнтів виживання $s_1, \dots, s_{n-1}$ у наступному році.

Вважаючи l заданим числом, знову розглянути вправу розрахунку чисельності популяції через m років.

Вправа №798. Взаємний вплив деяких двох конкуруючих видів на розмір x_n, y_n їхніх популяцій у n -му році описується системою

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 2x_n - y_n \\ y_{n+1} &= -x_n + 2y_n.\end{aligned}$$

Нехай $x_0 = a, y_0 = b$ ($a \neq b$) де a і b —дані числа, Знайти чисельності обох видів за всі роки, що передують повному вимиранню одного з них.

Вправа №799. Дано натуральні числа $n, a_1, \dots, a_n$, що відображають спостереження за лісовим мурашником. Спочатку було виловлено 100 робочих мурах, усі вони були позначені і випущені на волю. Далі, протягом n днів повторювалося наступне: відловлювались по 100 робочих мурах, підраховувалося число позначених серед них (a_i — кількість позначених мурах серед виловлених у i -й день, $i = 1, \dots, n$), позначалися непомічені мурахи, що знаходяться в цій сотні, потім усіх 100 мурах випускалися на волю. Потрібно підрахувати (наближено) число, робочих мурах у цьому мурашнику.

Вправа №800. Ця вправа є продовженням попередньої, Через рік спостереження над мурашником були відновлені. Знову спочатку було виловлено 100 робочих мурах і усі вони були позначені новою, відмінною від торішньої міткою і випущені на волю. Потім протягом n днів повторювалося наступне: відловлювались по 100 робочих мурах, підраховувалося число позначених тільки минулорічною міткою, тільки новою міткою й обома мітками (в i -ий день фіксувалися відповідно числа a_i, b_i, c_i), потім позначалися мурахи цієї сотні, ще не позначені міткою цього року, і всі 100 мурах випускалися на волю.

Потрібно висунути розумні гіпотези відносно числа робочих мурах у мурашнику цього року, про кількість серед них нових робочих мурах і кількості торішніх. Вихідні дані задачі: $k, l, n, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$ де k — число робочих мурах, позначених торік, l — можливе загальне число робочих мурах торік. Зміст інших чисел роз'яснений вище.

Вправа №801. “Залежність маси від зросту”. Часто намагаються “укласти” деякі експериментальні чи статистичні дані в деяку просту формулу. Нехай, наприклад, обстежено n дорослих людей з нормальною статурою й обмірюваний зріст (у см) x_i і маса (у кг) y_i кожного з них. Можна намагатися на підставі цих вимірів одержати

формулу виду $y = ax + b$, що виражає масу y через зріст x . Звичайно, важко розраховувати на те, що для яких-небудь конкретних a і b будуть з абсолютною точністю виконані всі n рівностей $y_i = ax_i + b$ ($i = 1, \dots, n$). Але неважко знайти a і b такі, що величина $f(a, b)$, рівна $(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$, має найменше з можливих значень (Рис. 57). Для виконання цієї умови досить, щоб*)

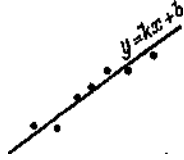


Рис.57

$$\frac{df(a,b)}{da} = 0 \quad \frac{df(a,b)}{db} = 0.$$

Останні рівності дають два лінійних рівняння для визначення a і b (це окремий випадок методу найменших квадратів, що належить Гауссу):

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)a + (x_1 + \dots + x_n)b = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

$$(x_1 + \dots + x_n)a + nb = y_1 + \dots + y_n$$

Дано дійсні числа $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Одержати зазначені a і b .

З приводу цієї задачі зробимо наступне зауваження. Дійсно, цим способом можна одержати деякі: a і b ; більш того, вважається, наприклад, що для чоловіків з нормальною статурою $a \approx 1$, $b \approx -100$. Однак значно більш точну формулу можна одержати використовуючи не багаточлен першого ступеня $ax + b$, а багаточлен третього степеня $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (порівн. із вправою 793 б). Цей багаточлен теж можна шукати методом найменших квадратів.

*) Нехай $g(t_1, \dots, t_k)$ – функція зазначених дійсних змінних перемінних, dg/dt_i – це часткова похідна g по t_i , тобто результат диференціювання g по t_i , при якому усі величини, крім t_i , вважаються постійними.

§ 27. Тексти*)

Вправа №802. Дано текст; знайти найбільша кількість цифр, що йдуть у ньому підряд.

Вправа №803. Дано текст; визначити, чи містить він символи відмінні від букв і пробілу.

Вправа №804. Дано текст.

а) Якщо в тексті немає символу *, те залишити цей текст без зміни, інакше кожна з малих латинських букв, попередніх першому входженню символу *, замінити на цифру 3.

б) Якщо в тексті немає символу +, то залишити текст без зміни, інакше кожна з цифр, що передують першому входженню символу +, замінити символом —.

Вправа №805. Дано текст; якщо в ньому немає малих латинських букв, то залишити його без зміни, інакше кожен із символів, наступних за першою групою малих латинських букв, замінити крапкою.

Вправа №806. Дано текст; з'ясувати, чи є цей текст:

- а) ідентифікатором;
- б) десятковим записом цілого числа.

Вправа №807. Дано символну матрицю розміру $n \times m$. Одержати послідовно всі рядки матриці, крім тих, для яких є рівні серед рядків з меншими номерами.

Вправа №808. Дано текст. Групи символів, розділені пробілами (одним чи декількома) і, що не мають усередині себе, будемо називати, як і колись (див. вправу 269), словами.

а) Для кожного зі слів указати, скільки разів воно зустрічається серед всіх слів, утворених символами даного тексту.

б) Знайти всі слова, що містять найбільшу кількість голосних латинських букв (*a, e, i, o, u*).

в) Знайти всі слова, у яких частка букв *a, b* максимальна.

г) У тих словах, що закінчуються сполученням букв *ing*, замінити це закінчення на *ed*.

*) Спосіб завдання тексту може вибиратися в залежності від використовуваної мови програмування і від того, які складності готовий переборювати той, хто розв'язує вправу. Текст може бути послідовністю символів (частковий випадок - вмістом символного файлу), рядком, групою рядків (частковий випадок - вмістом текстового файлу) і т.д.

Вправа №809. Дано натуральне число n . Одержати символічне представлення n у виді послідовності цифр і пробілів, що відокремлюють групи по три цифри, починаючи праворуч. Наприклад, якщо $n = 1753967$, то повинно вийти 1753967.

Вправа №810. Дано натуральне число n ($n \leq 1000$). Записати число українськими словами (сімнадцять, двісті п'ятдесят три, тисяча і т.д.).

Вправа №811. Дано натуральне число n , рівне вираженій в копійках ціні деякого товару, наприклад 317, 5005, 100 і т.д. Виразити ціну в гривнях і копійках, наприклад 3 грн. 17 коп., 50 грн. 05 коп., 1 грн. 00 коп. і т.д. (число копійок записується завжди двома цифрами).

Вправа №812. Дано текст, кожен символ якого може бути малою буквою, чи цифрою або одним зі знаків +, −, *. Групою букв будемо називати таку сукупність послідовно розташованих букв, якій безпосередньо не передує і за якою безпосередньо не слідує буква. Аналогічно визначимо групу цифр і групу знаків.

а) З'ясувати, чи зустрічається в даному тексті група букв *one*.

б) З'ясувати, чи вірно, що в даному тексті більше груп букв, ніж груп знаків.

в) Якщо в даному тексті мається не менш двох груп букв, то кожен знак +, що зустрічається між двома першими по порядку групами букв, замінити цифрою 1, знак − замінити цифрою 2, а знак * – цифрою 3. Інакше залишити текст без змін.

г) Підрахувати – число входжень букви *f* у перші три групи букв (у припущенні, що текст містить не менш трьох груп букв).

д) Знайти число таких груп букв, що починаються і закінчуються однією й тією ж буквою.

е) Знайти всі такі групи букв, у які буква *a* входить не менш двох разів.

ж) Знайти саму довгу групу цифр. Якщо цю найбільшу довжину має кілька груп, то взяти першу по порядку.

Вправа №813. Дано текст. Якщо перший символ тексту не є малою латинською буквою, то залишити його без змін. Якщо ж це мала латинська буква, але за початкової групою малих латинських букв не слідує цифра, то також залишити текст без зміни. Інакше кожен цифру, належну групі цифр, що слідує за початковою групою малих латинських букв, замінити символом *.

Вправа №814. Дано текст.

а) Знайти номер першої один по порядку групи цифр (див. вправу 812), що починається цифрою 2;

б) Знайти число тих груп букв (див. вправу 812), які закінчуються тією ж буквою, що і перша група букв.

в) Якщо в даному тексті є група знаків (див. вправу 812), що починається знайомий *, то взяти першу по порядку з них і в наступній групі знаків (якщо така мається) замінити кожний зі знаків знаком + .

Вправа №815. Шахівницю будемо представляти символічної матрицею розміру 8×8 . Дано натуральні числа n і m ($1 \leq n \leq 8$, $1 \leq m \leq 8$) – номери вертикалі й горизонталі, що визначають місце розташування ферзя. Відповідний елемент матриці треба покласти рівним символу ϕ . Поля, що знаходяться під загрозою ферзя, треба покласти рівним символу *, а інші поля – символу 0. Вирішити аналогічну вправу для коня.

Вправа №816. Перетворити вираз (тобто текст спеціального виду), складений з цифр і знаків чотирьох арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення), у постфіксну форму. У постфіксній формі спочатку записуються операнди, а потім знак операції. Приклади:

звичайний запис	постфіксний запис
$3 + 4$	$34 +$
$(5 - 4) + 2$	$54 - 2 +$
$2 * (3 + 4) * 5$	$234 + * 5 *$

Вправа №817. Для більшості іменників, що закінчуються на *-онок* і *-енок*, множина утворюється від іншої основи. Як правило, це відбувається за зразком: *цыплёнок* – *цыплята*, *мышонок* – *мышата* і т.д. (у новій основі перед останньою буквою m пишеться a чи y в залежності від попередньої букви: якщо це шипляча, то a , інакше – y). Маються слова-виключення, з яких вкажемо наступні: *ребёнок* (*дети*), *бесёнок* (*бесенята*), *опенок* (*опята*), *звонок* (*звонки*), *позвонок* (*позвонки*), *покдонок* (*подонки*), *колонок* (*колонки*), *жаворонок* (*жаворонки*), *бочонок* (*бочонки*). Є ще ряд маловживаних слів-виключень, що ми не розглядаємо.

Дано текст, серед символів якого мається пробіл. Група символів, що передує першому пробілу, представляє собою російське слово, що закінчується на *-онок* чи *-енок*. Одержати це слово в множині.

Вправа №818. Розглянемо іменники чоловічого роду, що закінчуються на *-ок*: *кружок*, *маслёнок*, *брелок* і т.д. При відмінюванні таких слів буква *о* може виступати як біжуча голосна: *кружка*, *маслёнком* і т.д. При відмінюванні деяких таких слів голосна *о*, однак, зберігається. Це, по-перше, слова з трьох букв: *ток*, *сок* і т.д.; потім слова: *скок*, *блок*, *волок*, *восток*, *шток* і слова, основа яких закінчується на такі сполучення букв (тобто *перескок*, *пищоблок*, *юго-восток* і т. д.); нарешті, мається ще ряд слів, серед яких укажемо наступні: *брелок*, *щелок*, *войлок*, *челнок*, *зарок*, *срок*, *урок*, *знаток*, *поток*, *сток*, *артишок*.

Дано текст, серед символів якого мається пробіл. Група символів, що передує першому пробілу, представляє собою російське слово – іменник чоловічого роду, що закінчується на *-ок*; після першого пробілу йде одна з

букв *и, р, д, в, т, п* що вказує відмінок (називний, родовий, давальний, знахідний, орудний, місцевий, кличний). Одержати дане слово в зазначеному відмінку.

Вправа №819. Дано натуральне число n , символ s ($n \leq 1000$, s – одна з букв *и, р, д, в, т, п*, що вказує відмінок – називний, родовий, давальний, знахідний, орудний, місцевий, кличний). Записати кількісний числівник, що позначає n , у відповідному відмінку (ця вправа узагальнює вправу 810).

Вправа №820. Як показують численні експерименти, розбивка російського слова на частині для переносу з одного рядка на інший з великою імовірністю виконується правильно, якщо користатися наступними простими прийомами *):

1) Два голосні, що йдуть поряд, можна розділити, якщо першої з них передує голосна, а за другою йде хоча б одна буква (буква *й* розглядається разом з попередньою голосною як одне ціле).

2) Дві приголосні, що стоять поряд, можна розділити, якщо першій з них передує голосна, а в тій частині слові яка йде за другою приголосною, мається хоча б одна голосна (букви *ь, ъ* разом з попередньою приголосною розглядаються як єдине ціле).

3) Якщо не вдається застосувати пункти 1), 2), то слід спробувати розбити слово так, щоб перша частина мала більш ніж одну букву і закінчувалася на голосну, а друга містила хоча б одну голосну.

Імовірність правильної розбивки збільшується, якщо попередньо скористатися хоча б неповним списком префіксів, що містять голосні, і спробувати перш за все виділити зі слова такий префікс.

Дано текст, що є російським словом. Виконай поділ його на частини для переносу.

Вправа №821. Використовуючи рішення попередньої вправи і вправи про вирівнювання правого краю сторінки (вправа 422), виконати наступне. Дано натуральне число n і символічний файл, послідовність компонентів якого представляє собою текст українською мовою. Абзац (новий рядок позначений символом $\uparrow$). Вивести цей текст рядками довжини n . Абзац починати з трьох пробілів.

*) Програма, що реалізує ці прийоми, була описана в [42]

§ 28. Календар*)

Вправа №822. Дано номер року. Вказати число днів цього року!

Вправа №823. Дано натуральні числа n, m ($n \leq m$). Визначити, скільки з чисел $n, n+1, \dots, m$ є номерами високосних років.

Вправа №824. Дано натуральні числа a, b, c , що означають число, місяць і рік, наприклад $1, 4, 1901$ – *1 квітня 1901 року*. Одержати трійку чисел, що відповідають наступному дню.

Вправа №825. Дано натуральні числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, які вказують дві дати (число, місяць, рік). Обчислити:

- а) кількість днів, що пройшли між двома цими датами;
- б) кількість повних років, що пройшли між двома цими датами.

Вправа №826. Дано натуральні числа a, b, c , що означають число, місяць і рік.

- а) Перевірити коректність цієї дати (наприклад, *30 лютого 1900 рік* – некоректна дата).
- б) Знайти номер цього дня з початку року.
- в) Визначити, скільки повних днів залишилося до кінця року.

Вправа №827. Дано натуральні числа a, b , що позначають число і місяць. На який день тижня припадає ця дата, (якщо рік – невисокосний, *1 січня* цього року – *середа*?)

Вправа №828. “Вічний календар”. Дано натуральні числа a, b, c , що позначають число, місяць і рік. Визначити день тижня, на який припадає зазначена дата.

При рішенні цієї і деяких наступних задач можна вважати, що досліджувана дата лежить у діапазоні від 1582 до 4902 р. Як установлено (див. [56]), у цьому випадку номер дня тижня (неділя має номер 0, понеділок – номер 1, ..., субота – номер 6) дорівнює залишку від ділення на 7 значення виразу $[2.6t - 0.2] + d + y + [y/4] + [c/4] - 2c$, де d – номер дня в місяці (1, 2, ...); t – номер місяця в році, нумерація починається з березня (березень має номер 1, квітень – номер 2, ..., грудень – номер 10, січень і лютий вважаються місяцями з номерами 11 і 12 попереднього року); y – дві молодші цифри року (00, ..., 99); c – дві старші цифри року (15, ..., 49); $[x]$ означає цілу частину числа x .

Для створення більш універсального календаря, що охоплює всі роки, можна використовувати безпосередній підрахунок, заснований на тому, що **1 січня 1 року нашої ери було понеділком.**

*) При рішенні задач цього розділу взяти до уваги, що у сучасному (григоріанському) календарі щороку, номер якого ділиться на 4, є високосним, за винятком тих номерів, які діляться на 100 і не діляться на 400.

Вправа №829. Обчислити кількість п'ятниць, що приходяться на 13-і числа

а) XX сторіччя;

б) сторіччя з номером n , де n – дане натуральне число.

Вправа №830. Дано натуральні числа a, b, c , що позначають дату (число, місяць, рік) по юліанському календарю. Одержати цю дату по сучасному календарю. Розбіжність між датами визначається тим, що в юліанському календарі щороку, номер якого поділяється на 4, є високосним, і з цього правила немає ніяких виключень.

Вправа №831. День учителя щорічно відзначається в першу неділю жовтня. Дано натуральне число n , що означає номер року. Визначити число, на яке в жовтні зазначеного року приходиться День учителя.

Вправа №832. У деякій бібліотеці останній четвер кожного місяця – санітарний день. Дано натуральне число n , означаюче номер року. Одержати всі числа, на які у січні, лютому, ..., грудні зазначеного року припадає санітарний день.

Вправа №833. Земний рік продовжується $365\frac{1211}{5000}$ доби. З цього випливає,

що точною була б така календарна система при якій серед 5000 наступних років. Що йдуть один за одним мається 1211 високосних і відповідно 3789 невисокосних відповідно. Ця система, заснована на 5000 літніх циклах була б незручною в практичних відносинах. Вправу побудови більш зручних календарних систем Розв'язувалась за допомогою придатних дробів (див. вправу 575). Знайти використовуючи обчислювальну машину, усі придатні дроби числа $1211/5000$. Яка саме з цих дробів визначає закон чергування невисокосних і високосних років у сучасному календарі (чотирирічні цикли)? Указати також придатний дріб, що визначає закон чергування у календарі Омара Хайяма, у якому розглядалися не чотирирічні, а тридцятирічні цикли.

§ 29. Криптографія

Вправа №834. Щоб зашифрувати текст, записаний за допомогою українських букв і розділових знаків, його можна переписати, замінивши кожен букву безпосередньо наступною за алфавітом (буква *я* замінюється на *а*).

- а) Зашифрувати даний текст.
- б) Розшифрувати даний текст.

Вправа №835. Можна узагальнити спосіб шифрування, викладений у попередній задачі – зсув виконується не на одну букву, а на n букв, де n – дане натуральне число (можна уявляти собі, що букви виписані по колу, як цифри на циферблаті). Виконати завдання а), б) попередньої вправи, використовуючи це узагальнення.

Вправа №836. Один з найпростіших способів шифровки тексту складається в табличній заміні кожного символу іншим – його шифром. Вибрати деяку таблицю, розробити спосіб її представлення, потім

- а) зашифрувати даний текст;
- б) розшифрувати даний текст.

Вправа №837. Щоб зашифрувати текст із 121 букви, його можна записати в квадратну матрицю порядку 11 по рядках, а потім прочитати по спіралі, починаючи з центра (тобто з елемента, що має індекси 6, 6).

- а) Зашифрувати даний текст.
- б) Розшифрувати даний текст.

Вправа №838. Шифровка тексту за допомогою решітки полягають в наступному. Решітку, тобто квадрат з картонного паперу 10×10 кліток, деякі клітки в якому вирізані, і сполучаються з цілим квадратом 10×10 кліток і через прорізи на папір наносяться перші букви тексту. Потім решітка повертається на 90° і через прорізи записуються наступні букви. Це повторюється ще двічі. Таким чином, на папір наноситься 100 букв тексту. Решітку можна зображувати квадратною матрицею порядку 10 (з нулів і одиниць (нуль зображує проріз)). Довести, що матриця $[a_{i,j}]_{i=1,\dots,10,\dots, j=1,\dots,10}$ може служити ключем шифру, якщо з елементів $a_{ij}, a_{10-i+1}, a_{i10-j+1}, a_{10-i+1;10-j+1}$ в точності один дорівнює нулю.

Дано послідовність з 100 букв і матриця-ключ.

- а) Зашифрувати дану послідовність.
- б) Розшифрувати дану послідовність.

Вправа №839. Зафіксуємо натуральне k і перестановку чисел $1, \dots, k$ (її можна задати за допомогою послідовності натуральних чисел $p_1, \dots, p_k$, у яку входить кожне з чисел $1, \dots, k$). При шифровці у вихідному тексті до кожної з послідовних груп по k символів застосовується зафіксована перестановка. Нехай $k = 4$ і перестановка $3, 2, 4, 1$. Тоді група символів s_1, s_2, s_3, s_4 замінюється на s_3, s_2, s_4, s_1 . Якщо в останній групі менше чотирьох символів, то до неї додаються пробіли. Користаючись викладеним способом:

- а) зашифрувати даний текст;
- б) розшифрувати даний текст.

Вправа №840. Наступний спосіб призначений для шифровки послідовностей нулів і одиниць (чи, наприклад, крапок і тире). Нехай $a_1 \dots, a_n$ – така послідовність. Те, що пропонується в якості її шифру, – це послідовність $b_1 \dots, b_n$ утворена по наступному закону:

$$b_i = a_i, \quad b_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_i = a_{i-1} \\ 0, & \text{в протинному випадку} \end{cases}$$

$i=2, \dots, n.$

Користаючись викладеним способом:

- а) зашифрувати дану послідовність;
- б) розшифрувати дану послідовність.

Вправа №841. “Виправлення помилок”. Нехай по деякому каналу зв’язку передається повідомлення, що має вид послідовності нулів і одиниць (чи, аналогічно, крапок і тире)! Через перешкоди можливий помилковий прийом деяких сигналів: нуль може бути сприйнятий як одиниця і навпаки. Можна передавати кожен сигнал тричі, замінюючи, наприклад, послідовність 1, 0, 1 послідовність 1,1,1,0,0,0,1,1,1. Три послідовні цифри при розшифровці замінюються тією цифрою, що зустрічається серед них принаймні двічі. Таке потроювання сигналів істотно підвищує імовірність правильного прийому повідомлення.

Написати програму розшифровки.

Вправа №842. Способи шифровки тексту, засновані на табличній заміні вхідних у неї букв деякими символами (см. вправу 836) чи на зсуві букв (див. вправи 834, 835), негарні тим, що шифр може бути розгаданий шляхом частотного аналізу символів, що входять у зашифрований текст-згадаємо розповідь Э. По “Золотий жук”. Наступний спосіб позбавлений цього недоліку. Нехай текст, що шифрується є послідовність, що складається з букв $s_0, s_1 \dots, s_m$. При допомогою датчика випадкових чисел можна, наприклад, одержувати члени послідовності $v_0, v_1 \dots$ з розподілом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ і при шифровці символу s_i ($0 \leq i \leq m$) застосовувати зсув на v_i букв. Тоді дві однакові букви, що зустрічаються в зашифрованому тексті, не зобов’язані позначати ту саму букву вихідного тексту. Для розшифровки повідомлення потрібно скористатися таким же датчиком випадкових чисел.

У наступних двох завданнях для простоти передбачається, що текст записаний українськими буквами без розділових знаків, пробіл після шифровки залишається пробілом.

- а) Зашифрувати даний текст.
- б) Розшифрувати даний текст.

§ 30. Графіка

Вправа №843. Побудувати графіки *) лінійної функції $y = kx$ для $k = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1$.

Вправа №844. Побудувати графіки функцій:

- а) $y = 3x^2$; б) $y = -6x^2 + 3x$;
 в) $y = x^3 + 2x^2 + x$ г) $y = x^5$;
 д) $y = \sin x$; е) $y = \cos(x-1) + |x|$.

Вправа №845. Побудувати графіки функцій, зазначених у вправі 337.

Вправа №846. Досліджувати область визначення і побудувати графіки наступних функцій:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{x+3}{x-2}$; в) $y = y = 3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;

г) $y = 3 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$; д) $y = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1}$;

е) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$; ж) $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 1}$;

з) $y = \frac{x}{3x^2 + 2x + 1}$; и) $y = \frac{x}{x^2 + 2x + 1}$;

к) $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$; л) $y = \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$

м) $y = \frac{x}{x^2 - 3x + 1}$.

Вправа №847. Побудувати криві по заданому параметричному представленню **).

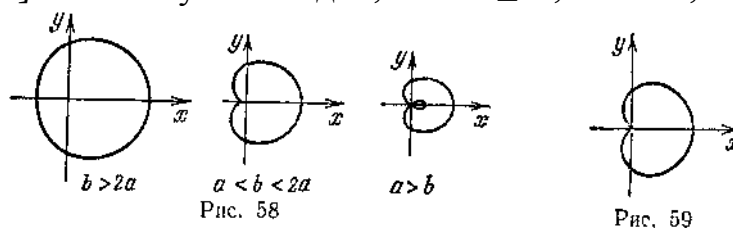
а) Коло радіуса r з центром на початку координат: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

б) Еліпс із великою і малою півсями, рівними відповідно r_1 і r_2 і розташованими паралельно осям координат; $x = r_1 \cos t$, $y = r_2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

*) При розв'язуванні вправ 843—846, 849 на побудову графіків функцій варто попередньо вибрати розташування координатних осей і масштаб на них. Вибір придатної системи координат необхідний також у вправах 847, 848, 850—854 на побудову кривих, заданих рівняннями того чи іншого виду. Надалі в залежності від характеру задачі може застосовуватися або спеціально підібрана, або екранна система координат.

**) Параметричне представлення кривої l на площині з координатами x, y — це дві функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, визначені на одній і тій же числовій множині.

в) Равлик Паскаля (Рис. 58): $x = a \cos^2 t + b \cos t$, $y = a \cos t \sin t + b \sin t$, $a > 0$, $b > 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Розглянути випадки, коли $b \geq 2a$, $a < b < 2a$, $a > b$.



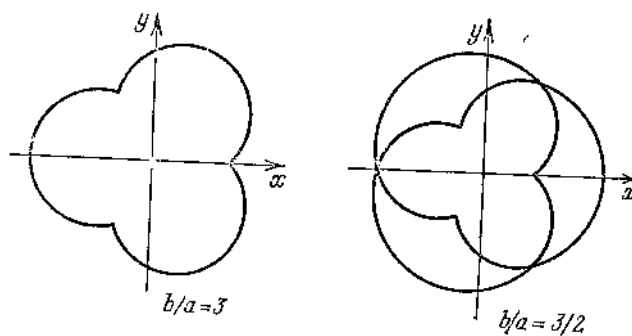
г) Кардіоида (Рис. 59): $x = a \cos t (1 + \cos t)$, $y = a \sin t (1 + \cos t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

д) Епіциклоїда (Рис. 60): $x = (a+b) \cos t - a \cos((a+b)t/a)$, $y = (a+b) \sin t - a \sin((a+b)t/a)$, $a > 0$, $b > 0$.

Розглянути наступні випадки:

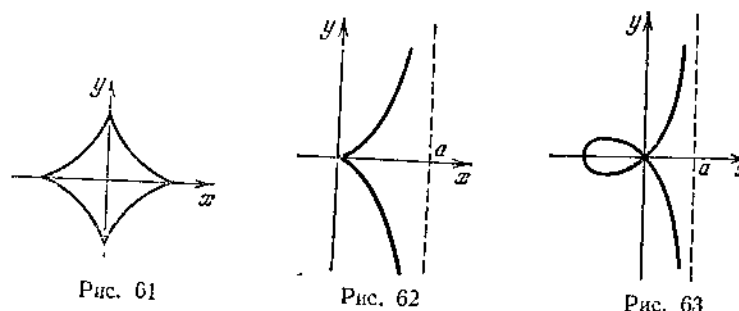
1) якщо b/a є ціле позитивне число, $t \in [0, 2]$.

2) якщо $b/a = p/q$, де p і q позитивні цілі взаємно прості числа, $t \in [0, 2q\pi]$.



е) Астроїда (Рис. 61): $x = b \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

ж) Цісоїда (Рис. 62): $x = at^2/(1+t^2)$, $y = at^3/(1+t^2)$, $t \in [-\infty, \infty]$, $a > 0$.



з) Строфоїда (Рис. 63) $x = a(t^2-1)/(t^2+1)$, $y = at/(t^2+1)$, $t \in [-\infty, \infty]$, $a > 0$.

и) Конхоїда Нікомедя (Рис. 64): $x = a + l \cos t$, $y = a \tan t + l \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ – права вітка, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ – ліва вітка, $a > 0$, $l > 0$.

Розглянути випадки, коли $l < a$, $l > a$, $l = a$

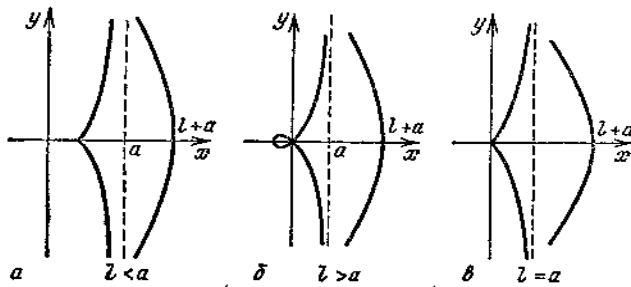


Рис. 64

Вправа №848. Побудувати криві по їх рівняннях у полярних координатах*).

*) Полярні координати ρ, φ точки M на площині – це відстань $\rho = OM$ від фіксованої точки O (полюса) до точки M і кут $\varphi = \angle POM$ між OM і полярною віссю (напівпрямий) OP (Рис. 68).

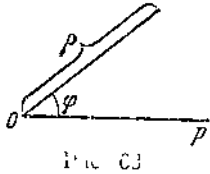


Рис. 68

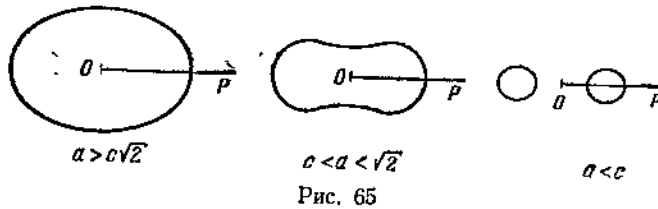


Рис. 65

а) Овали Касіні (Рис. 65):

$$\rho^2 c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos 2\varphi + (a^4 - c^4)}.$$

Розглянути випадки, коли $a > c\sqrt{2} > 0$, $0 < c < a < c\sqrt{2}$, $0 < a < c$.

б) Лемніската (Рис. 66): $\rho = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$, $a > 0$.

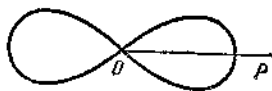


Рис. 66

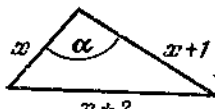


Рис. 67

Вправа №849. Розглянемо трикутник зі сторонами $x, x+1, x+2$, де x – деяке дійсне число (Рис. 67). Кут α між сторонами x і $x+1$ є функцією від x . Досліджувати область визначення і побудувати графік цієї функції.

Вправа №850. Креслення окружності, заданої параметричними рівняннями $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. (див. попередню вправу), виконується досить повільно в зв'язку з необхідністю обчислення тригонометричних функцій. Процес можна при $\pi/2$ скорити, якщо скористатися параметричними рівняннями

$$x = x_c + r \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = y_c + r \frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in [0, 1].$$

Зазначена зміна параметра відповідає дузі кола від 0 до $\pi/2$.

Повне коло може бути

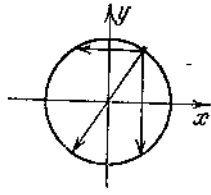


Рис. 69

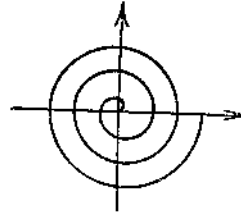


Рис. 70

побудовано симетричним відображенням кожної отриманої точки щодо осі OX , осі OY і початку координат у припущенні, що початок координат сполучений з центром кола (Рис. 69).

Дано натуральні x_c, y_c, r . Побудувати коло з центром у точці (x_c, y_c) і радіусом r , скориставшись алгоритмом, описаним вище.

Вправа №851. Побудувати спіраль навколо початку координат з n витками і зовнішнім радіусом r ; початковий напрямок спіралі утворить з віссю OX кут α (Рис. 70). Параметричне представлення спіралі: $x = r \cos t, y = r \sin t, r = t/2, \alpha \leq t \leq 2n\pi$.



Рис. 71

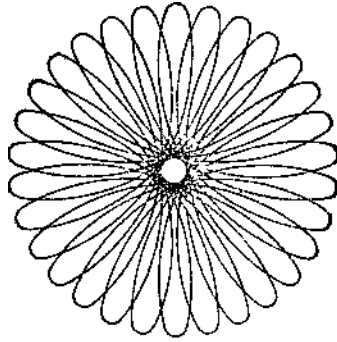
Вправа №852. Використовуючи рішення попередньої задачі, накреслити фігуру, показану на Рис. 71. Фігура складається з чотирьох спіралей, укладених в окружність радіуса r з центром у точці (x_c, y_c) . Початковий кут однієї зі спіралей задано і дорівнює α , початковий кут кожної наступної спіралі перевищує початковий кут кожної попередньої спіралі на 45° .

Вправа №853. Спірограм – це зубцюватий диск радіуса B , розміщений у середині колеса радіуса A . Диск обертається против годинникової стрілки і завжди знаходиться в зачепленні з зовнішнім колесом. У диску мається невеликий отвір на відстані D від центра диска, у яке поміщається олівець. Грифель олівця в процесі обертання креслить малюнок; креслення закінчується, коли олівець повертається у вихідне положення. За допомогою спірографа можуть бути побудовані малюнки, подібні приведенному на Рис. 72.

Рівняння кривої, що вичерчується грифелем, у параметричній формі має вид

$$x = (A - B)\cos t + D \cos \varphi,$$

$$y = (A - B)\sin t - D \sin \varphi, \text{ де } \varphi = (A/B)t, D < B < A.$$



Кут t міняється від 0 до $2\pi n$, n дорівнює B , діленому на найбільший спільний дільник (НСД) B і A (див. вправу 89).

Дано натуральні A , B , D ($D < B < A$). Скласти програму, що моделює спірограф.

Вправа №854. Побудувати на екрані безліч точок, координати яких задовольняють наступним нерівностям чи системам нерівностей:

а) $|y| + 2|x| \leq x^2 + 1$;

б) $x^2 + y^2 \leq 2|x| + |y|$;

в) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 2|x| + |y|$;

г) $\log_{1/3}(2x + y - 2) > \log_{1/3}(y + 1)$,

$\sqrt{y - 2x - 3} < \sqrt{3 - 2x}$;

д) $y + |x| \leq 4$;

е) $2y - x^2 < 0$,
 $x^2 + y^2 \geq 0$

ж) $y \geq x^2 - 4x + 3$,
 $y < x^2 + 4x + 3$

з) $2y \geq x^2$,
 $y = -2x^2 + 3x$;

и) $\sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leq 2x + 1$.
 $x^2 + y^2 \leq 4$

Вправа №855. Криві дракона, показані на Рис. 73, а—73, в, можуть бути побудовані за допомогою наступного рекурентного методу. Кожній кривій ставиться у відповідність послідовність, що складається з нулів і одиниць (будемо називати її двійковою формулою), де одиниця відповідає повороту кривої ліворуч, а нуль – повороту праворуч. Крива дракона першого порядку має двійкову формулу 1 (Рис. 73, а). Для того щоб одержати двійкову формулу

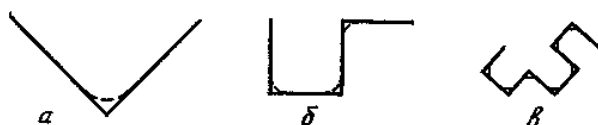


Рис. 73

кривої дракона кожного наступного порядку, варто приписати праворуч до формули кривої попереднього порядку одиницю. Отримана послідовність дає половину шуканої формули. Потім у послідовності цифр, що передують приписаній одиниці, варто замінити на нуль одиницю, що стоїть в її середині, після чого приписати отриману послідовність праворуч від уже побудованої частини формули. На Рис. 73, б показана крива дракона другого порядку, який відповідає двійкова формула 110, а на Рис. 73, в – крива дракона третього порядку – їй відповідає двійкова формула 1101100. Криві будуються від хвоста до голови дракона і повернені так, щоб дракони “пливли” праворуч, а паща і кінчик хвоста доторкались до “поверхні води”. Прямі кути звичайно округлюються дугою чи зрізуються (показане на Рис. 73, а—73, в штриховою лінією) для того, щоб вершини кутів не стикалися і не створювалася ілюзія самоперетинання кривої.

Дано натуральне n . Одержати криву дракона порядку n .

Вправа №856. Побудувати зображення, приведені на Рис. 74, застосувавши який-небудь спосіб розфарбування.

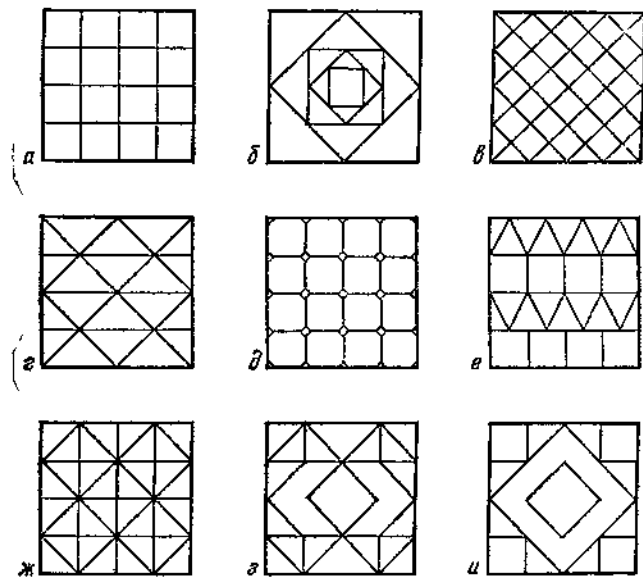


Рис. 74

Вправа №857. Дано натуральні числа n і r . Побудувати n точок, що є вершинами правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса r , і з'єднати кожну з точок із всіма іншими $n-1$ точками. Координати точок задаються формулами $x_i = r \cos(2\pi i/n)$, $y_i = r \sin(2\pi i/n)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Щоб уникнути повторного креслення ліній, що з'єднують ті самі точки, кожну точку з номером i варто з'єднувати тільки з тими точками з номерами j , для яких виконана умова $i < j$.

Вправа №858. Дано натуральне число m . Побудувати фігури, показані на мал. 75, а—75, r . Фігури утворені багатокутника, уписаного в це коло, і з'єднаних між собою певним чином. Фігура на Рис. 75, а – це правильний восьмикутник, утворений послідовним з'єднанням його вершин. Для побудови фігури на Рис. 75, б варто з'єднувати колом радіуса r і вісьмома

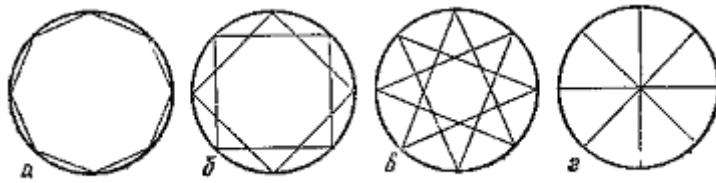


Рис. 75

точками, що є вершинами правильного багатокутника через одну. При побудові фігури на Рис. 75, в з'єднуються вершини, що відстоять одна від одної на дві вершини, а при побудові фігури на Рис. 75, г – що відстоять на три вершини.

Вправа №859. Дано натуральні числа n і r . Побудувати квадрат, довжина сторони якого дорівнює r . Розмістити по одній точці в кожному куті квадрата і по $n-1$ точок на кожній його стороні. Відстані між сусідніми точками на кожній зі сторін повинні бути однаковими і рівними r/n . Тим самим буде побудовано всього $4n$ точок, які можна занумерувати числами $1, \dots, 4n$ (нумерація починається з лівого верхнього кута квадрата і виконується послідовно). З'єднати кожну точку з номером i з усіма точками з номерами j ($i, j=1, \dots, 4n$) такими, що $j > i$ і різниця $j-i$ є число Фібоначчі, менше $4n$ (див. вправу 144).

Вправа №860. Рівняння $f(x,y) = 0$, що представляє всі точки (x, y) деякої кривої, називають рівнянням кривої в неявній формі. Якщо крива поділяє площину на дві частини, то рівняння в неявній формі дозволяє визначити, чи лежить точка на кривій, якщо ні, то в якій частині вона лежить (див. вправу 52).

Дано натуральні числа $r, x_c, y_c, n, a_0, \dots, a_{2n-1}$. Числа r, x_c, y_c задають радіуса r з центром у точці (x_c, y_c) . Пари чисел a_i, a_{i+1} (i кратне 2) є координатами точок.

а) Побудувати коло і всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і що лежать поза колом.

б) Побудувати коло і всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і що лежать усередині кола.

в) Побудувати коло і всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і не приналежні колу. Точки, що лежать поза колом й усередині його, повинні мати різні кольори.

Вправа №861. Дано натуральні числа $a, b, c, n, a_0, \dots, a_{2n-1}$. Числа a, b, c задають пряму l з рівнянням $ax + by + c = 0$. Пари чисел a_i, a_{i+1} (i кратне 2) є координатами точок.

а) Побудувати пряму l всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і такі, що $ax + by + c < 0$.

б) Побудувати пряму l всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і такі, що $ax + by + c > 0$.

в) Побудувати пряму l і всі точки задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і не приналежні прямій l . Точки, що лежать по різні сторони від прямої, повинні мати різні кольори.

Вправа №862. Рівняння прямої в неявній формі (див. вправу 860) має дуже корисну властивість; $|f(x,y)/(a^2+b^2)|$ дорівнює довжині перпендикуляра від точки (x, y) до прямої. Наприклад, якщо $f(x,y) = -x+2y+2$, то довжина перпендикуляра, опущеного на пряму з точки $(0, 1)$, дорівнює $|f(0,1)|/5 = 4/5$.

Дано натуральні числа $a, b, c, n, a_0, \dots, a_{2n-1}$ дійсне число r . Числа a, b, c визначають пряму з рівнянням $ax + by + c = 0$. Пари чисел a_i, a_{i+1} (i кратне 2) є координатами точок.

а) Побудувати пряму l і всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і не належать прямій l і такі, що довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму, менше r .

б) Побудувати пряму l і всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і не належить прямій l і такі, що довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму, більше r .

в) Побудувати пряму l і всі точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$ і не належать прямій l . Точки, для яких довжина перпендикуляра, опущеного на пряму, менше r і більше r , повинні бути пофарбовані в різні кольори.

Вправа №863. Нехай дана система лінійних нерівностей

$$a_1x + b_1y + c_1 \geq 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 \geq 0,$$

.....

$$a_mx + b_my + c_m \geq 0,$$

Кожна з нерівностей цієї системи визначає в координатній площині деяку напівплощину. Якщо які-небудь числа x і y задовольняють усім нерівностям системи, то точка (x, y) належить перетинанню зазначених напівплощин. Границя цього перетинання може складатися з відрізків, напівпрямих і цілих прямих. У тому випадку, коли границя складається тільки з відрізків, перетинання напівплощин є опуклим багатокутником (ми тут називаємо багатокутником не тільки границю, але і всю безліч точок, охоплених границею). Обернене твердження, будь-який опуклий багатокутник, що належить координатній площині, може бути описаний системою нерівностей. Нехай $A_1, \dots, A_n$ – послідовні вершини опуклого багатокутника, з яких ніякі три не лежать на одній прямій. Можна вписати рівняння $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ прямої, що проходить через точки A_1, A_2 . Тому що багатокутник опуклий, то усі вершини $A_3, \dots, A_n$ лежать в одній напівплощині щодо цієї прямої. Тому як першу нерівність можна взяти

$$a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \quad \text{чи} \quad -a_1x - b_1y - c_1 \geq 0$$

у залежності від того, являється чи не являється позитивним числом результат підстановки в $a_1x + b_1y + c_1$ координат якої-небудь із точок

$A_3, A_4, \dots, A_n$. Аналогічним чином варто поступати з рівняннями прямих, що проходять через точки A_2, A_5 і т.д. (останні дві точки — A_n, A_1).

Дано натуральні числа $n, a_0, \dots, a_{2n-1}$. Пари чисел a_i, a_{i+1} , (i кратне 2), є координатами точок. Розглядається границя l опуклого багатокутника з вершинами в точках $(36, 30), (30, 27), (24, 30), (30, 39)$. Побудувати l , а також точки, задані послідовністю $a_0, \dots, a_{2n-1}$

- а) що лежать поза багатокутником;
- б) що лежать усередині багатокутника, але не на l ;
- в) приналежні l (точки виділити кольором, відмінним від кольору l);
- г) що лежать де-небудь на площині; ті точки, що лежать усередині багатокутника, на його границі і поза ним, повинні мати різні кольори, жоден з яких не збігається з кольором границі.

Вправа №864. Нехай дві точки задані своїми координатами (x_1, y_1) і (x_2, y_2) . Пряма, що проходить через ці дві точки, може бути описана наступними параметричними рівняннями:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t.$$

При $0 < t < 1$ точка (x, y) лежить усередині відрізка і поділяє його у відношенні $t/(1-t)$; при $t=0$ досягається кінець відрізка (x_1, y_1) , при $t=1$ — кінець (x_2, y_2) . При $t > 1$ точка (x, y) лежить на прямій поза відрізком з тієї ж сторони від (x_1, y_1) , що і (x_2, y_2) ; при $t < 0$ — із протилежної сторони.

Дано натуральні числа x_1, y_1, x_2, y_2 , дійсне число μ ($0 \leq \mu < 1$). Побудувати відрізок з координатами кінців $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ і точку що ділить відрізок в у відношенні $\mu/(1-\mu)$.

Вправа №865. Накреслити візерунок, показаний на Рис. 76. Візерунок утворений 20 вкладеними квадратами. Сторони першого квадрата рівнобіжні осям координат екрана і рівні 60. Вершини кожного наступного квадрата — це точки на сторонах попереднього квадрата, що поділяють ці сторони у відношенні $\mu = 0.08$ (див. попередню вправу).

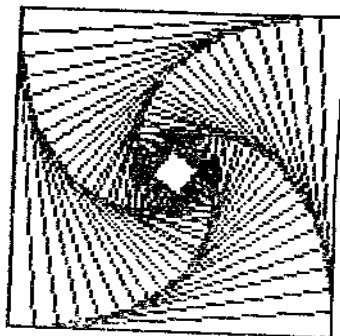


Рис. 76

Вправа №866. Накреслити візерунок, що повторює візерунок, описаний в попередній вправі, але складений з

- а) трикутників;
- б) п'ятикутників;
- в) шестикутників.

Вправа №867. Побудувати візерунок, показаний на мал. 77, використовуючи алгоритм, описаний у вправі 864.

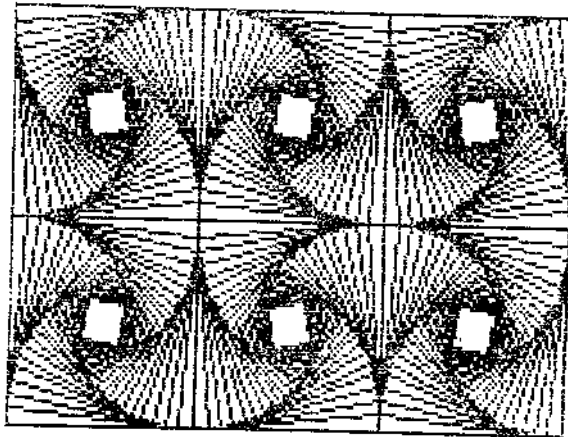


Рис. 77

Вправа №868. Дано натуральні x_1, y_1, x_2, y_2 . Накреслити штрихові лінії між точками x_1, y_1, x_2, y_2 , так, як показано на Рис.78 .

Спосіб визначення координат точки, що лежить на відрізку з кінцями (x_1, y_1) і (x_2, y_2) і ділить відрізок в заданому відношенні, див. у вправі 864.

Вправа №869. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$. Побудувати дві прямі, одна з яких проходить через точки з координатами (x_1, y_1) і (x_2, y_2) , а через точки з координатами (x_3, y_3) і (x_4, y_4) . Побудувати точку перетину цих прямих, якщо вона існує, і визначити, чи лежить точка перетину усередині відрізків з $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, і $(x_3, y_3), (x_4, y_4)$ чи поза ними (див. вправу 864).

Вправа №870. Дано цілі числа $t_1, t_2, \dots, t_{31}$. Послідовність значень $t_1, t_2, \dots, t_{31}$ задає графік температур за березень місяць, подібний показаний на Рис. 79.

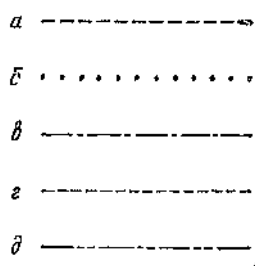


Рис. 78



Рис. 79

Побудувати графік температур. Відрізки прямих, що лежать вище горизонтальної прямої, що відповідає нульовій температурі, і що лежать нижче цієї прямої, повинні бути пофарбовані в різні кольори.

Вправа №871. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Побудувати відрізок з координатами кінців (x_1, y_1) і (x_2, y_2) , а також відрізок, паралельний і рівний по довжині першому відрізку; один кінець відрізка повинен мати координати (x_3, y_3) другий варто розташувати:

- по ту ж сторону від (x_3, y_3) що і (x_2, y_2) від (x_1, y_1) ;
- із протилежної сторони.

Скористатися тим, що параметричні рівняння прямої, що проходить через точку (x_3, y_3) і паралельної прямої, що проходить через точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) можуть мати вид

$$x = x_3 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_3 + (y_2 - y_1)t$$

Координати кінця шуканого відрізка обчислюються підстановкою значень $t=1$ і $t=-1$. При $t=1$ кінець відрізка буде розташований на прямій з тієї ж сторони від (x_3, y_3) , що і точка (x_2, y_2) , від точки (x_1, y_1) при $t=-1$ – з протилежної.

Вправа №872. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Побудувати відрізок з координатами кінців (x_1, y_1) і (x_2, y_2) , Через точку (x_1, y_1) провести відрізок, рівнобіжний і рівний по довжині першому відрізку, таким чином, щоб точки (x_3, y_3) поділяла шуканий відрізок навпіл (див. попередню вправу і вправу 864).

Вправа №873. Дано натуральні числа x_c, y_c, h, w, x, y . Побудувати прямокутник з центром у точці (x_c, y_c) , висотою h і шириною w , а також відрізок прямої з координатами кінців (x_c, y_c) і (x, y) . Відзначити точку перетину відрізка зі стороною прямокутника (Рис. 80).

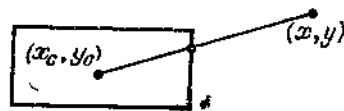


Рис. 80

Вправа №874. Дано натуральні числа x_c, y_c, h, w, x, y . Побудувати прямокутник з центром у точці (x_c, y_c) висотою h і шириною w , а також визначити координати x_p, y_p точки перетину з прямокутником невидимої прямої, що проходить через точки (x_c, y_c) і (x, y) (див. попередню вправу).

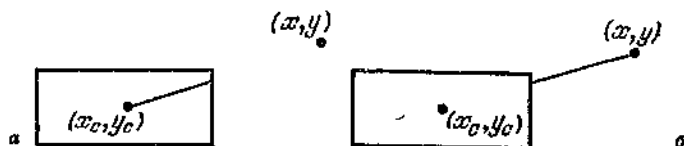


Рис. 81

Крім того, побудувати:

- а) відрізок прямої з координатами кінців (x_c, y_c) і (x_p, y_p) (Рис. 81, а);
- б) відрізок прямої з координатами кінців (x, y) і (x_p, y_p) (Рис. 81, б).

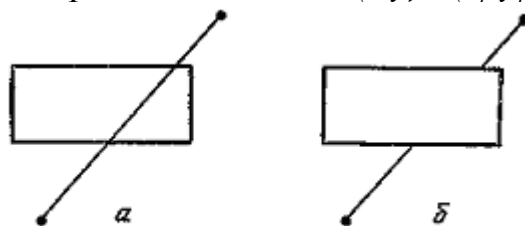


Рис. 82

Вправа №875. Прямокутник заданий координатами лівого верхнього і правого нижнього кута, відрізок – координатами кінців. Передбачається, що відрізок перетинає протилежні сторони прямокутника так, як показано на Рис. 82, а. Побудувати фігуру, зображену на Рис. 82, б (див. вправу 873).

Вправа №876. Дано натуральні числа x_c, y_c, r, x, y . Побудувати коло з центром у точці (x_c, y_c) і радіусом r , а також відрізок з координатами кінців (x_c, y_c) і (x, y) . Відмітити точку перетинання відрізка й кола.

Скористатися тим, що пряма, що проходить через точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) , може бути описана параметричними рівняннями $x = x_1 + et, y = y_1 + ft$, де

$$e = (x_2 - x_1)/d, f = (y_2 - y_1)/d, d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Такий спосіб завдання прямої відрізняється від вказаного у вправі 864 тим, що при $t = 1$ ми одержуємо не другий кінець відрізка (x_2, y_2) , як у вправі 864, а точку, що стоїть від кінця (x_1, y_1) на одиничну відстань. З цього випливає, що точки перетинання відрізка з колом можуть бути обчислені підстановкою в дані параметричні рівняння значення $t=r$, де r – радіус кола.

Вправа №877. Дано натуральні числа x_c, y_c, r, x, y . Побудувати коло з центром у точці (x_c, y_c) і радіусом r , а також визначити координати x_p, y_p точки перетинання з колом невидимої прямої, що проходить через точки (x_c, y_c) і (x, y) . Крім того, побудувати відрізок з координатами кінців:

а) (x_c, y_c) і (x_p, y_p) ;

б) (x, y) і (x_p, y_p) .

Відзначити точку перетинання відрізка й кола.

Вправа №878. Дано натуральні числа x_1, y_1, x_2, y_2 . дійсне μ ($0 < \mu < 1$). Побудувати відрізок з координатами кінців (x_1, y_1) , (x_2, y_2) і відновити перпендикуляр до відрізка з точкою (x_3, y_3) , який ділить його у відношенні $\mu(1-\mu)$.

Скористатися тим, що пряма, перпендикулярна відрітку з кінцями (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , що проходить через точку (x_3, y_3) , описується параметричними рівняннями $x = x_3 + ft, y = y_3 + et$, або $x = x_3 - ft, y = y_3 - et$,

$$e = (x_2 - x_1)/d, f = (y_2 - y_1)/d, d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Відстань довільної точки на цій прямій від точки (x_3, y_3) визначається параметром t (див. також вправу 864).

Вправа №879. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Побудувати відрізок з координатами кінців (x_1, y_1) , (x_2, y_2) і опустити на нього чи на його продовження перпендикуляр з точки (x_3, y_3) (див. попередню вправу і вправу 876).

Вправа №880. Дано натуральні числа x_1, y_1, x_2, y_2 . Побудувати відрізок з координатами кінців (x_1, y_1) і (x_2, y_2) і який-небудь відрізок, паралельний і рівний по довжині першому відрітку і віддаленому від нього на 30 одиниць (див. вправи 871 і 878).

Вправа №881. Нехай стрілка, що з'єднує дві довільні точки, улаштована, як у вправі 127. Дано натуральні числа x_1, y_1, x_2, y_2 . Побудувати стрілку, спрямовану з точки (x_1, y_1) у точку (x_2, y_2) . (Спосіб визначення координат точки, що лежить на відрітку з заданими кінцями і що ділить цей відрізок у заданому відношенні, див. у вправі 864. Спосіб побудови прямої, перпендикулярної даний, див. у вправі 878.)

Вправа №882. Дано натуральні числа x, y, r, x_1, y_1, h, w . Побудувати коло радіуса r з центром у точці (x_1, y_1) , прямокутник з центром у точці (x_1, y_1) , висотою h і шириною w , а також відрізок, що з'єднує центр кола з центром прямокутника (Рис. 83).

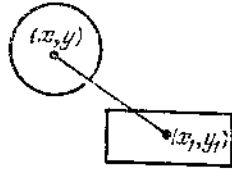


Рис. 83

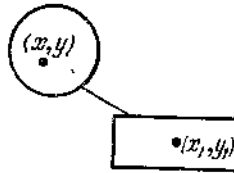


Рис. 84

Вправа №883. Дано натуральні числа x, y, r, x_1, y_1, h, w . Побудувати коло радіуса r з центром у точці (x, y) , прямокутник з центром у точці (x_1, y_1) , висотою h і шириною w , а також відрізок, що з'єднує кола із прямокутником. Відрізок повинний лежати на невидимій прямій, що проходить через центри кола і прямокутника, починатися в точці перетинання цієї прямої з колом і закінчуватися в точці перетину прямої з прямокутником (Рис. 84).

(Спосіб визначення координат точок перетину прямої, що проходить через дві задані точки, з колом і прямокутником див. у вправах 876 і 873.)

Вправа №884. Дано натуральні числа x, y, n , символи $s_1, \dots, s_n$. Послідовність символів $s_1, \dots, s_n$ вивести так, щоб точка з координатами (x, y) була розташована (Рис. 85):

- а) в центрі послідовності;
- б) з лівого краю послідовності;
- в) із правого краю послідовності.

ТЕКСТ
(x,y)
а

ТЕКСТ
(x,y)
б

ТЕКСТ
(x,y)
в

Рис. 85

Вправа №885. Нехай у двовимірній декартовій системі координат задані плоска фігура і нехай (x, y) – координати однієї з її точок. Розглянемо, як зміняться ці координати, якщо до фігури застосувати одне з наступних перетворень: перенос уздовж осей координат, поворот навколо початку координат, розтягання (стиск) по осях координат.

1) Перенос на t_x одиниць по осі OX і t_y одиниць по осі OY :

$$(x, y) \rightarrow (x - t_x, y - t_y).$$

2) Розтягання (стиск) по осі OX у s_x разів і по осі OY у s_y разів:

$$(x, y) \rightarrow (s_x x, s_y y).$$

3) Поворот навколо початку координат на кут t радіан? $(x, y) \rightarrow (x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t).$

Трикутник заданий координатами вершин. Побудувати його, а потім перенести на десять одиниць по осі OX і на п'ять одиниць по осі OY .

Вправа №886. Дано натуральні числа x_c, y_c, r і дійсне число t . Побудувати правильний п'ятикутник, вписаний в коло з центром у точці (x_c, y_c) і радіусом r , після чого повернути його відносно початку координат на кут t радіан (див. попередню вправу).

Вправа №887. Дано натуральні числа x_c, y_c, r, s_x, s_y . Побудувати правильний шестикутник з центром у точці (x_c, y_c) і стороною r , після чого розтягти (стиснути) його по осі OX у s_x разів, а по осі OY – в s_y разів (див. вправу 885).

Вправа №888. Побудувати фігуру, зображену на Рис. 86. У центрі фігури знаходиться рівносторонній трикутник із заданою стороною (див. вправу 885).

Вправа №889. Виконати завдання а)–е) вправи 849, після чого застосувати до побудованих фігур наступні перетворення:

- а) перенос по осі OX на 10 одиниць у напрямку, зворотному напрямку осі;
- б) поворот відносно початку координат на кут $\pi/4$ радіан;
- в) розтягання (стиск) по осі OY у два рази (див. вправу 885).

Вправа №890. Побудувати спіраль, описану в вправі 851, після чого застосувати до неї перетворення а)–в) попередньої задачі.

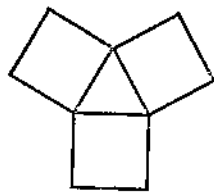


Рис. 86

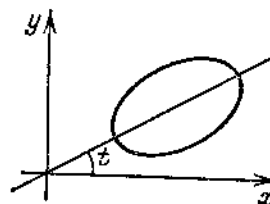


Рис. 87

Вправа №891. Дано натуральні числа x_c, y_c, a, b і дійсне t . Накреслити еліпс із центром у точці (x_c, y_c) , великою віссю a , малою віссю b велика вісь утворить кут t радіан з додатною піввіссю OX (Рис. 87).

Скористатися наступним алгоритмом. Побудувати еліпс із центром на початку координат, з великою і малою осями, що збігаються з осями OX і OY системи координат (параметричні рівняння такого еліпса дані у вправі 849). Після чого застосувати до еліпса наступні перетворення: поворот на кут t радіан і перенос по осі OX на x_c одиниць, по осі OY —на y_c одиниць (див. вправу 885).

Вправа №892. Дано натуральні числа x_c, y_c, r і дійсне число t . Накреслити астроїду радіуса r з центром у точці (x_c, y_c) , де одна з осей фігури складає кут t радіан з додатною піввіссю OX (Рис. 88) (Див. вправи 849 і 885.)

Вправа №893. Один з можливих способів побудови на екрані букв довільного розміру був описаний у вправі 131. Інший досить широко розповсюджений спосіб полягає в тому, що букви будуються з окремих відрізків, розташовуваних відповідно до конфігурації букви в прямокутнику

визначеного розміру, подібно тому, як це робиться при написанні цифр чи електронного годинника чи індексу на поштовому конверті (Рис. 89). Якщо припустити, що лівий нижній кут прямокутника сполучений з початком координат, то кожному відрізку можна поставити у відповідність координати його кінців. Так, букві Б, зображеної на Рис. 90, відповідає послідовність координат $(0, 0) - (0, 8)$, $(0, 8) - (4, 8)$, $(0, 4) - (4, 4)$, $(0, 0) - (4, 0)$, $(4, 4) - (4, 0)$ – назовемо її векторним

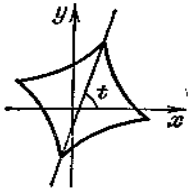


Рис. 88

А Б В
Г Д Е
Ж З И
К Л М

Рис. 89

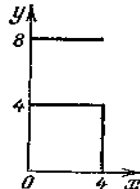


Рис. 90

шаблоном букви. Таким чином, наступне окреслення букви на екрані зводяться до побудови відрізків, координати кінців яких визначаються відповідно до векторного шаблону і з урахуванням позиції екрана, у яку повинний бути поміщений лівий нижній кут відповідного прямокутника. (Перенос і інші перетворення фігур описані в задачі 885.)

Скласти векторні шаблони для всіх букв алфавіту і цифр і одержати на екрані слово ТЕСТ, розташоване, як показано на Рис. 91, а і 91, б.

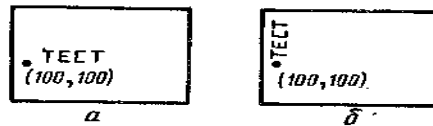


Рис. 91

Вправа №894. Використовуючи шаблони, описані в попередній вправі, виконати підписуночі підписи до графік функцій із вправи 843—849.

Вправа №895. Дано натуральні числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$. Побудувати прямокутник, лівий верхній кут якого знаходиться в точці (x_1, y_1) , а правий нижній – у точці (x_2, y_2) , і прямокутник, лівий верхній кут якого знаходиться в точці (x_3, y_3) , а правий нижній – у точці (x_4, y_4) . Визначити, чи перетинаються ці прямокутники. Якщо так, то зафарбувати їхню загальну частину.

Для рішення задачі скористатися наступним. Нехай

$$l = \max(x_1, x_3),$$

$$r = \min(x_2, x_4),$$

$$b = \max(y_2, y_4),$$

$$t = \min(y_1, y_3).$$

Прямокутники перетинаються, якщо $l < r$ і $b < t$. Загальною частиною двох пересічних прямокутників також є прямокутник (передбачається, що сторони прямокутників попарно паралельні). Лівий верхній і правий нижній кути прямокутника перетинання знаходяться в точках з координатами відповідно (l, t) і (r, b) .

Вправа №896. Два прямокутники задані координатами своїх лівого верхнього і правого нижнього кутів. Чи вірно, що прямокутники перетинаються і що перший з них розташований лівіше і нижче, ніж другий? Якщо так, то побудувати фігуру, показану на Рис. 92 (див. попередню вправу).

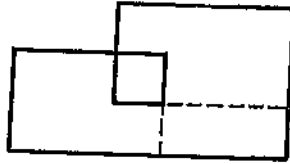


Рис. 92

Вправа №897. Питання в тому, чи перетинаються дві (чи більш) плоскі геометричні фігури, частково може бути зведене до більш

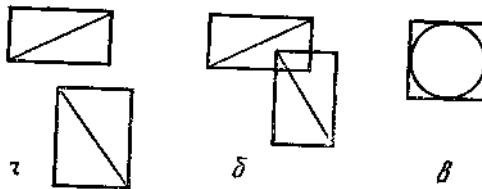


Рис. 93

простого питання проте, чи перетинаються прямокутники, що охоплюють ці фігури. У випадку, коли прямокутники не перетинаються, не перетинаються і самі фігури (Рис. 93, а). Коли прямокутники перетинаються (Рис. 93, б), потрібно додатковий аналіз.

Охоплюючий прямокутник будується в такий спосіб: прямокутник повинний цілком укладатися в собі фігуру і мати сторони, паралельні осям координат. При цьому прагнуть визначити прямокутник, що має найменшу площу. Такий прямокутник легко побудувати для багатьох геометричних фігур, наприклад для відрізка прямої, трикутника, кола (Рис. 93, в) і т.д. Більш складно будувати що охоплює прямокутники для дуг чи кіл інших кривих.

а) Відрізок прямої заданий координатами кінців. Побудувати прямокутник, що охоплює даний відрізок.

б) Коло задане координатами центра і радіусом. Побудувати квадрат, що охоплює дане коло.

в) Трикутник заданий координатами вершин. Побудувати прямокутник, що охоплює даний трикутник.

Вправа №898. Відрізок прямої заданий координатами кінців, коло – координатами центру і радіусом, трикутник – координатами вершин. Побудувати задані фігури, а також прямокутники, що охоплює кожну з фігур, і прямокутник, що охоплює усі три фігури (Рис. 94). Скористатися тим, що лівий верхній і правий нижній кути прямокутника, що охоплює n фігур, мають координати відповідно (l, t) і (r, b) , де

$$l = \min(l_1, \dots, l_n),$$

$$r = \max(r_1, \dots, r_n),$$

$$b = \min(b_1, \dots, b_n),$$

$$t = \max(t_1, \dots, t_n),$$

де (l_i, t_i) , (r_i, b_i) – координати лівого верхнього і правого нижнього кутів прямокутника, що охоплює i -е фігуру

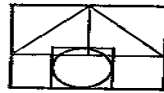


Рис. 94

Вправа №899. Дано натуральні числа $n, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Побудувати точки з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ і прямокутник, що охоплює усі ці крапки.

Скористатися тим, що лівий верхній і правий нижній кути шуканого прямокутника мають координати (l, t) і (r, b) , де

$$l = \min(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$r = \max(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$b = \min(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$t = \max(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

Вправа №900. При роботі з графічним зображенням часто виникає необхідність вибрати одну або кілька точок екрана. Так, наприклад, для того щоб побудувати відрізок, варто задати два його кінці, для побудови кола можна задати його центр і будь-яку точку на колі і т.д. Для указування необхідної точки звичайно використовують курсор. Курсор може мати одну з наступних конфігурацій:

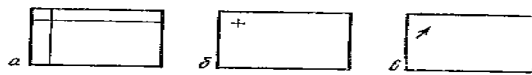


Рис. 95

а) Перехрестя (Рис. 95, а). Точка, що вказується – це, перетин двох прямих.

б) Хрестик (Рис. 95, б). Точка, що вказується – це, перетин двох прямих.

в) Стрілка (Рис. 95, в). Точка, що вказується – це точка на яку вказує вістря стрілки.

Побудувати курсори а)-в), що вказують точку з координатами $(100, 100)$.

Вправа №901. Зміна точки, що вказується, (див. вправу 900), чи, інакше, керування курсором, може виконуватися, наприклад, із клавіатури: натискання клавіш керування курсором означає зміну точки, що вказується, і викликає відповідну зміну чи форму чи положення курсору. Для курсору – перехрестя зміна точки, що вказується, супроводжується переміщенням горизонтальної чи вертикальної прямої, що утворить курсор, чи обох прямих одночасно. Зміна точки, що вказується, для чи хрестика чи курсору-стрілки супроводжується відповідним переміщенням курсору.

Реалізувати процедури для керування з клавіатури курсором кожного з типів, описаних у попередній задачі.

Вправа №902. Вибір потрібної точки екрана звичайно виконується підведенням курсору до цієї точки і натисканням клавіші “введення”. Іноді буває корисно бачити і попередню вибрану крапку – останню точку, зафіксовану клавішею “введення”, і нову точку, на яку вказує курсор. Для цього використовуються метод гумової нитки і метод гумового прямокутника.

а) У методі гумової нитки (Рис. 96, а) один кінець відрізка зафіксований і вказує останню обрану точку, другий кінець переміщається відповідно до зміни точки, що вказується.

б) У методі гумового прямокутника (Рис. 96, б) один кут прямокутника зафіксований і вказує останню обрану точку, а протилежний кут переміщається відповідно до зміни точки, що вказується.

Реалізувати метод гумової нитки і метод резинового прямокутника.

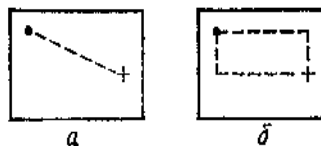


Рис. 96

Вправа №903. Побудувати трикутник по заданих вершинах. Точки екрана, що є вершинами трикутника, вказуються з клавіатури по методу гумової нитки (див. попередню вправу).

Вправа №904. Побудувати коло по двох заданих точках: центру й однієї з точок кола. Обидві точки вказуються з клавіатури по методу гумового прямокутника (див. вправу 900).

Вправа №905. Побудувати прямокутник по двох заданих точках: лівому верхньому і правому нижньому куту. Обидві точки вказуються з клавіатури (див. вправу 900).

Вправа №906. Побудувати ламану по заданих вершинах. Вершини вказуються з клавіатури (див. вправу 900).

Вправа №907. Скласти програму для керування розмірами кола і його положенням на екрані. Вихідне коло має центр у точці (100, 100) і радіус $r = 20$. Керування виконується клавішами:

“>” збільшує радіус кола на 5 крапок;

“<” зменшує радіус кола на 5 крапок;

клавіші керування курсором викликають переміщення кола у відповідному напрямку;

“введення” завершує роботу програми.

Вправа №908. Скласти програму для керування розмірами прямокутника і його положенням на екрані. Лівий верхній кут вихідного прямокутника розташований у точці $(50,50)$, правий у точці $(100, 100)$. Керування виконується клавішами:

“>” збільшує ширину прямокутника на 5 точок;

“<” зменшує ширину прямокутника на 5 точок;

“+” збільшує висоту прямокутника на 5 точок;

“–” зменшує висоту прямокутника на 5 точок;

клавіші керування курсором викликають переміщення прямокутника у відповідному напрямку;

“уведення” завершує роботу програми.

Вправа №909. Скласти програму для довільного малювання на екрані. Це слід курсору, переміщуваного за допомогою клавіш керування курсором. Повинні забезпечуватися можливість стирання зображення і режим, у якому курсор не залишає слід.

Вправа №910. Скласти програму “електронний калейдоскоп”. Побудова калейдоскопа виконувати в такий спосіб. У центрі екрана повинний бути зображений правильний шестикутник $ABCDEF$, вершини якого з’єднані з його центром O (Рис. 97). Трикутник FOA повинен бути розсічений декількома прямими, кількість і розташування яких вибирається за допомогою датчика випадкових чисел. Кожна з отриманих у такий спосіб

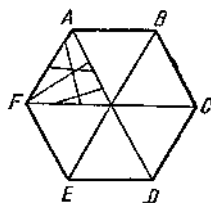


Рис. 97

частин трикутника FOA повинна бути зафарбована кольором, номер якого також вибирається за допомогою датчика випадкових чисел. Після цього зображення в кожному наступному трикутнику (при русі по чи проти годинникової стрілки) повинне бути отримано симетричним відображенням зображення, сформованого раніше в кожному попередньому трикутнику, щодо їхньої загальної сторони: так, зображення в трикутнику AOB повинне бути отримано симетричним відображенням зображення, сформованого в трикутнику щодо сторони OA ; зображення в трикутнику BOC повинне бути отримано симетричним відображенням зображення, уже сформованого в трикутнику AOB , щодо сторони OB і т. д.

§ 31. Звукогенерація *)

Вправа №911. Відтворити до-мажорний тризвук (до-мі-сінь) послідовно, по одній ноті.

Вправа №912. Відтворити;

- а) хроматичну гаму;
- б) гаму зазначеної тональності.

Вправа №913. Відтворити зображені на Рис. 98 акорди (всі ноти акорду повинні звучати одночасно).



Рис. 98

Вправа №915. Скласти програму для гри в музичну вікторину. Програма повинна послідовно відтворювати кілька популярних мелодій, що грають – вгадати, яка мелодія була програна.

Вправа №916. Скласти ігрову програму, що відтворює три популярні мелодії, а потім одну з них навпаки: остання нота мелодії звучить першою, перша – останньою. Граючі повинні угадати, ноти якої мелодії були відтворені в зворотному порядку.

Вправа №917. Скласти програму для відтворення мелодії, “зіграної” на клавіатурі комп’ютера. Як і при грі на фортепіанній клавіатурі, кожній клавіші ставиться у відповідність деяка нота; тривалість, звучання ноти визначається тривалістю натискання клавіші.



Рис. 99

Вправа №918. Скласти програму для запам’ятовування і наступного відтворення мелодії, “зіграної на фортепіанній клавіатурі”. Клавіатура зображується на екрані (мал. 99, а). Спочатку курсором указується клавіша, а після цього – позначення тривалості (мал. 99,б).

*) У вправах 913, 919, 923—925, 927, 930, 931 цього розділу передбачається, що комп’ютер (подібно шкільному комп’ютеру “Ямаха”) оснащений звукогенератором, що має три канали, кожним з яких можливо керувати незалежно.

Вправа №919. Скласти програму, що буде за допомогою датчика випадкових чисел музичні інтервали (терцію, кварту, квінту і т.д.) і акорди. Той хто навчається повинен визначити, який інтервал чи яке обернення тризвуку (тонічний тризвук, секста-акорд і т.п.) були відтворені.

Вправа №920. Скласти програму “музичний диктант”. Програма повинна відтворювати мелодію, а той хто навчається, правильно повторити її (див. вправу 917 чи 918). Якщо диктант “написаний правильно”, може бути почате нове завдання. У противному випадку диктант виконується ще раз.

Вправа №921. Скласти ігрову програму, що відтворює популярну мелодію з мелодійними змінами, наприклад, замінюючи деякі ноти іншими чи нотами паузами відповідної тривалості. Граючий повинний угадати, яка мелодія була зіграна.

Вправа №922. Скласти програму транспонування мелодії на зазначене число півтонів вгору чи вниз. Мелодія задається так само, як у вправі 917 чи 918.

Вправа №923. Скласти програму “секвенсор”, що служить для одночасного виконання трьох мелодій. Мелодії задаються так само, як у вправі 917 чи 918, з тією відмінністю, що завдання кожної наступної мелодії супроводжується відтворенням усіх мелодій, зіграних раніше, тобто завдання другої мелодії виконується при одночасному звучанні першої мелодії, а завдання третьої мелодії – при одночасному звучанні перших двох мелодій. Наступне відтворення усіх трьох мелодій повинне виконуватися при натисканні клавіші, поставленої їм у відповідність.

Вправа №924. Музичний акомпанемент може являти собою послідовність акордів. Для використання комп'ютера як акомпануючий інструмент пропонується задати кілька акордів і зіставити кожному акорду одну з клавіш. Тривалість звучання акорду визначається тривалістю натискання клавіші.

У найпростішому випадку досить розглянути три акорди: тонічний тризвук, домінантний тризвук, субдомінантний тризвук (приклад див. на Рис. 98, б).

Вправа №925. Скласти програму, що виконує заданий акомпанемент. Акомпанемент повинен складатися з баса й акорду, що звучать по черзі (Рис. 100, а). Інший варіант баса й акорду починає звучати (без зміни музичного розміру) після натискання деякої клавіші. У найпростішому випадку досить розглянути три варіанти висоти ноти, що звучить у басі, і відповідного їй акорду: тоніка, домінанта і субдомінанта. Домінанта звучить у порівнянні з тонікою (Рис. 98, б) на два з половиною тони нижче, субдомінанта – на три з половиною тони нижче.

Бажано передбачити регулювання темпу, зміну ладу “мажор-мінор”, зміну розміру (на Рис. 100, *а* приведений акомпанемент на чотири чверті, на Рис. 100, *б* – на три чверті).

Вправа №926. Ця вправа, як і дві попередні, стосується *т* користування комп'ютера в якості акомпануючого інструмента. Акомпонімент складається з басу й акорду; при цьому розглядається три варіанти басової ноти і відповідного йому акорду (див. попередню вправу).



Рис. 100

Для виконання акомпанементу використовуються чотири клавіші: три з них варіанта баса, четвертий – акорд, вид якого визначається останньої з попередніх нот. Тривалість звучання визначається тривалістю натискання клавіші.

Вправа №927. Скласти програму – “композитор”. Програма за допомогою датчика випадкових чисел вибирає 12 різних нот і тривалість звучання кожної ноти. Отримана в такий спосіб мелодія відтворюється. Будь-яка мелодія, що сподобалася, може бути запам’ятована для наступного відтворення.

Вправа №928. Скласти програму для керування тембром звучання. Керування тембром виконується за допомогою введення груп обертонів – звукових коливань, амплітуда яких менше амплітуди основного тону, а частота в ціле число раз більша основної частоти. Обертони варто одержувати за допомогою датчика випадкових величин.

Вправа №929. Скласти програму колірною супроводу заданої мелодії (див. вправу 918). Відповідність кольору висоті звуку вибирається за бажанням того, хто складав програму чи граючого.

Вправа №930. Відтворити звуки, якими можуть супроводжуватися ігрові програми: някання кішки, скрип дверей, звук кульки, що лопнула, свист стріли, що летить, крикання і т. п. Такі звуки рекомендується і одержувати, використовуючи відносно високі частоти періодичних коливань генератора огибаючої – крос-модуляцію (на шкільному комп'ютері “Ямах” вони можуть бути отримані з допомогою параметрів *m* і *s* оператора PLAY) і генератор шуму (оператор SOUND).

Вправа №931. Скласти програму, моделюючи “луну” Для цього відтворити одну й ту саму мелодію по трьох каналах одночасно . Мелодія, що звучить по другому каналу, повинна бути виконана тихіше і з невеликим запізненням у порівнянні з мелодією, що звучить по першому каналі. Мелодія, що звучить по третьому каналі, повинна бути виконана тихіше і з невеликим запізненням у порівнянні з мелодією, що звучить по другому каналі.

Вправа №932. Дано український текст. Потрібно відтворити його звуковими сигналами азбуки Морзе. Передбачити можливість регулювання швидкості відтворення.

§ 32. Графіка і рух. Мультиплікація

Вправа №933. Зобразити на екрані крапку, що перетинає з постійною швидкістю екран з права наліво паралельно його горизонтальній осі *).

Вправа №934. До умови попередньої вправи додається наступне вимога: як тільки крапка доходить до лівого краю, у цей момент від правого краю в рядку, вибраному за допомогою датчика випадкових чисел, починає свій рух інша крапка і т.д. Колір крапки також може вибиратися за допомогою датчика випадкових чисел.

Вправа №935. Ускладнимо умову попередньої вправи: чергова крапка починає рух від правого краю екрана трохи раніш, ніж попередня крапка доходить до лівого краю. Спробувати домогтися того, щоб одночасно на екрані рухалися три, чотири крапки,

Вправа №936. Зобразити на екрані крапку, що рухається по окружності з постійною кутовою швидкістю.

Вправа №937. Скласти програму для керування швидкістю руху крапки по окружності (див. попередню вправу). Керування виробляється клавішами “>” (швидкість трохи збільшується) і “<” (швидкість трохи зменшується **).

Вправа №938. Зобразити на екрані пряму, що обертається в площині екрана навколо однієї зі своїх точок. Вправу можна ускладнити додатковою вимогою, щоб колір прямої змінювався при переході від попереднього положення до наступного.

*) У ряді наступних задач мова йде про рух крапки. Замість крапки на екрані можна використовувати невелике коло, прямокутник чи зображення предмета; волана для бадмінгону, стріли, літака т. д. Рух може супроводжуватися звуком.

**) У цій і в наступних задачах, у яких мова йде про обертання, аналогічним образом можна включити вимогу, щоб була представлена можливість керування з клавіатури швидкістю обертання.

Вправа №937. Зобразити на екрані відрізок, що обертається в площині екрана навколо

- а) своєї середини;
- б) свого кінця;
- в) точки, що поділяє відрізок у відношенні 1:3.

Вправа №940. Ускладнимо умову вправи 938 в у площині екрана повинні обертатися, кожна навколо своєї точки дві прямі,

Вправа №941. В умову попередньої вправи вноситься доповнення: повинне бути надана можливість керування з клавіатури відстанню між центрами обертання.

Вправа №942. Зобразити на екрані дві точки, що рухаються, траєкторії яких є концентричними колами. Кутова швидкість точки, що рухається по внутрішньому колу, повинна бути трохи менше, ніж кутова швидкість точки, що рухається по зовнішньому колі (обидві швидкості постійні величини). При цьому

- а) обидві точки обертаються в одному напрямку (наприклад, по годинниковій стрілці);
- б) точки обертаються в протилежних напрямках.

Вправа №943. Зобразити одночасне обертання двох стрілок – великої і малої, при якому одному повному обороту великої стрілки відповідає $1/12$ обороту малої стрілки (як на циферблаті годинника). Стрілки можна для простоти замінити відрізками.

Вправа №944. Зобразити на екрані правильний трикутник, що обертається в площині екрана навколо свого центра.

Вправа №945. Зобразити на екрані рівносторонній трикутник, що обертається в площині екрана навколо свого центра ваги.

Вправа №946. Зобразити на екрані прямокутник, що обертається в площині екрана навколо свого центра.

Вправа №947. Зобразити на екрані прямокутник, що обертається в площині екрана навколо однієї зі своїх вершин.

Вправа №948. Умови вправ 938, 939, 944 – 947 змінюються в таким чином; під час обертання прямої, відрізка чи багатокутника центр обертання з постійною швидкістю переміщається від одного краю екрана до іншого паралельно горизонтальній осі екрана.

Вправа №949. Умова цієї вправи відрізняється від попередньої тем, що потрібно зберігати на екрані усі висвітлені положення геометричної фігури. Вправу можна ще ускладнити додатковою вимогою, щоб колір фігури змінювався при переході від попереднього положення до наступного.

Вправа №950. Зобразити пряму, що рухається, що у кожен момент дотикається до кола даного радіуса, центр якої збігається з центром екрана. Точка дотику переміщається по колу з постійною кутовою швидкістю. Саме коло невидиме.

Вправа №951. Кругле кільце обертається з постійною кутовою швидкістю навколо свого діаметра, розташованого паралельно горизонтальній осі екрана. Зобразити на екрані

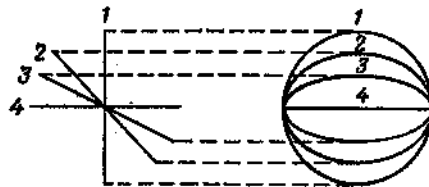


Рис. 101

процес обертання. Вважати, що в момент часу t кільце виглядає для спостерігача як еліпс, велика вісь якого дорівнює постійній величині c , а мала дорівнює $c|\cos \omega t|$, де ω – кутова швидкість обертання. У правій частині Рис. 101 приведено кілька послідовних зображень кільця, що виникають через рівні проміжки часу. У лівій частині малюнка кільце зображене збоку (цей вид не дається на екрані).

Вправа №952. Зобразити рівнобедрений трикутник, що обертається з постійною кутовою швидкістю навколо своєї висоти, розташованої паралельно вертикальній осі екрана.

Вправа №953. Зобразити на екрані гармонійні коливання точки вздовж деякого горизонтального відрізка. Якщо довжина відрізка дорівнює c , то відстань від точки до лівого кінця в момент часу t можна вважати рівним $c(1 + \cos \omega t)/2$, де ω – деяка постійна. Передбачити можливість керування частотою коливання при допомозі клавіш “>” й “<” аналогічно тому, як це описано у вправі 937 у відношенні обертової точки. При допомозі двох інших клавіш можна керувати амплітудою, тобто величиною c .

Вправа №954. Зобразити точку, що робить незалежні гармонійні коливання з частотою ω_1 по горизонталі і з частотою ω_2 по вертикалі (амплітуда тих і інших коливань дорівнює a). Вважати, що в момент часу t точка має координати $x = a \cos \omega_1 (t - t_1)$, $y = a \cos \omega_2 (t - t_2)$; числа t_1 і t_2 задані. Передбачити можливість керування з клавіатури значеннями ω_1 , ω_2 .

Вправа №955. Зобразити на екрані рух кулі по більярду без луз (мал. 102).

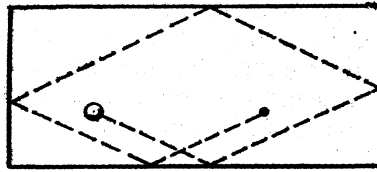


Рис. 102

Вправа №956. В умову попередньої вправи вноситься доповнення: куля повинна залишати за собою світний слід.

Вправа №957. Зобразити на екрані точку, що перетинає екран рівноприскорено у вертикальному напрямку.

Вправа №958. Виконати вправи 934, 935 стосовно до рівноприскореного руху.

Вправа №959. Зобразити на екрані кулю що наближається з даліни. За яким законом зростає видимий діаметр кулі з часом?

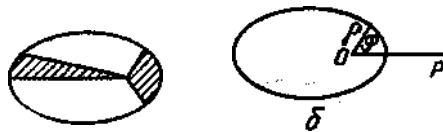


Рис. 103

Вправа №960. Відповідно до першого і другого закону Кеплера кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. У рівні часи радіус-вектор планети, проведений від Сонця, замітає рівні площі (мал. 103, а). Якщо ввести в площині орбіти полярні координати так, як показано на мал. 103, б (Сонце вибирається як полюс), то диференціальним рівнянням руху планети буде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{\rho^2},$$

де c – деяка постійна. З іншого боку, рівнянням еліпса в цій системі координат буде

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

де p і e – невід’ємні постійні, $e < 1$;

Одержати на екрані картину, що дає модель руху планети навколо Сонця (планета і Сонце зображуються світними точками: Сонце – нерухомою, а планета — рухомою). Для знаходження послідовностей $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \rho_0, \rho_1, \dots$ значень кута φ і відстані ρ через однакові проміжки часу, рівні τ , можна

скористатися методом Ейлера чисельного рішення диференціальних рівнянь. Це дозволить написати

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, & \rho_0 &= \frac{p}{1+e}, \\ \varphi_i &= \varphi_{i-1} + \frac{c\tau}{\rho_{i-1}^2}, & \rho_i &= \frac{p}{1+e\cos\varphi_i} \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots$$

(тут для простоти прийняте $\varphi_0 = 0$).

Значення c , τ , p , e варто підібрати так, щоб картина на екрані вийшла досить виразною (хоча, строго говорячи, величини c , p і e не можуть вибиратися незалежно одна від одної: вони зв'язані співвідношеннями, що впливають, зокрема, із третього закону Кеплера, але в даній графічній задачі цим можна зневажити). Для того щоб уявити собі форму еліпса в залежності від p і e , рекомендується розглянути випадки $\varphi=0, \pi/2, \pi$.

Вправа №961. Одержати мультфільм “Кола на воді”, використовуючи сім концентричних кіл. Центри кіл повинні бути сполучені з центром екрана, а радіуси змінюватися від 40 до 82 піксел, збільшуючись на 7 піксел з кожним наступним колом. Ілюзія руху повинна створюватися послідовною зміною кольорів всіх кіл, починаючи з внутрішнього і закінчуючи зовнішнім. Процес зміни кольорів варто повторити не менш десяти разів.

Вправа №962. Одержати на екрані слово ТЕСТ, складене з великих букв так, як описано у вправі 893, і забезпечити його переміщення по екрану:

- а) по горизонталі від лівого краю екрана до правого краю;
- б) по вертикалі від верхнього краю екрана до нижнього і назад.

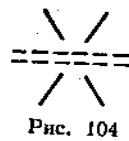
Вправа №963. Аналогічно попередній задачі одержати на екрані два слова ТЕСТ, що рухаються по екрані по одній горизонтальній прямій назустріч один одному. Перше слово повинне рухатися від лівого краю екрана до правого, друге – від правого краю до лівого. Рух повинен виконуватися до повного сполучення слів.

Вправа №964. Одержати на екрані яку-небудь фігуру, описану у вправі 129 (мал. 11,а–11,о), і “оживити” її: нехай курча (мал. 11,а) літає, із труби будиночка (мал. 11,б) йде дим, вантажівка (мал. 11, в) їде, ялинка (мал. 11, г) росте, куля (мал. 11,д) рухається вліво до зіткнення зі стінкою і назад, трикутник (мал. 11,е) рухається вниз до зіткнення з нижньою фігурою, пичка (мал. 11, ж) підморгує, риба (мал. 11,з) пливе, підвідний човен (мал. 11, и) піднімає й опускає перископ, сова, (мал. 11,к) махає крилами, стрілки будильника (мал. 11, л) і колесо (мал. 11, н) обертаються, велосипед (мал. 11, м) котиться, телефонний диск (мал. 11,о) крутиться.

Вправа №965. Одержати на екрані зображення якої-небудь фігури, описаної у вправі 130, і забезпечити її переміщення (шаблони для побудови фігур дані на мал. 12,*a*—12,*p*), Вибір напрямку переміщення і відстані, на які фігура повинна переміщатися в даному напрямку, виконувати:

- а) за допомогою датчика випадкових чисел;
- б) під керуванням із клавіатури – для цього повинні використовуватися клавіші “стрілка вгору”, “стрілка вниз”, “стрілка вправо” і “стрілка вліво”, що викликає переміщення фігури у відповідному напрямку на 5 піксел.

Вправа №966. Одержати звуковий мультфільм “Танцюючий НЛО”. НЛО будувати з окремих символів так, як показаної на Рис.104. Чергове положення НЛО на екрані визначати за допомогою датчика випадкових чисел. Результатом звертання до датчика повинні бути номери рядка і



стовпця екрана, з якими варто сполучити лівий верхній кут прямокутника розміром 3×4 символи, що охоплюють НЛО. Щораз, коли номер отриманого в таким чином стовпця виявиться кратним 12, НЛО повинен видавати звуковий сигнал.

Вправа №967. У мальованих мультфільмах ілюзія руху створюється послідовною зміною кадрів, кожний з яких фіксує чергове положення рухомого об’єкту. Використовуючи цей принцип, одержати мультфільм, що показує:

- а) чоловічка, що йде;
- б) чоловічка, що біжить;
- в) чоловічка, що виконує присідання;
- г) чоловічка, що виконує сигналізацію прапорцем.

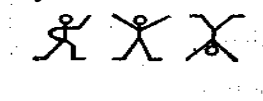


Рис.105

Для побудови окремих кадрів мультфільму скористатися фігурками, описаними в розповіді А. Конан Дойля “Танцюючі чоловічки”. Деякі з цих фігурок Рис.105.

Вправа №968. Аналогічно попередній задачі одержати спортивний мультфільм:

- а) про метання диска;
- б) про біг з бар’єрами;
- в) про підтягування на поперечині;
- г) про стрибки в довжину;
- д) про веслування;
- е) про підняття штанги.

Побудову окремих кадрів виконати на основі олімпійської символіки.

Вправа №969. Одержати звуковий мультфільм “Чоловічок, що танцює під музику”. Танець може полягати у виконанні найпростіших рухів, наприклад, тупцювання ногою або присідання, у такт мелодії, відтвореної на звукогенераторі.

Вправа №970. Аналогічно попередній задачі одержати звуковий мультфільм “Чоловічок, що грає на гітарі”. Гра на гітарі може зображуватися, наприклад за допомогою переміщення правої руки по струнах гітари нагору і вниз. Мультфільм повинний супроводжуватися відтворенням популярної мелодії.

Вправа №971. Зобразити на екрані дошку Гальтона (див. вправу 751) з кульками, що рухаються по ній. Одночасно по дошці повинно рухатися кілька кульок. Закінчивши рух кульки залишаються в нижній частині дошки. Використати датчик випадкових чисел для вибору шляху кульки при проходженні через перешкоду.

§ 33. Ігри*)

Ігрові програми, що пропонується скласти цьому розділі, можна умовно розділити на три групи,

У вправах з 972 по 996 розглядаються програми, призначення яких – підтримка необхідної ігрової обстановки. Граючому пропонується вихідна ситуація, породжувана, як правило, при допомозі датчика випадкових чисел, всі його ходи королюються: якщо хід зроблений по правилах гри, ситуація змінюється (наприклад, у вправах 972–975 зміна ігрової ситуації означає зміну положень кольорових куль на ігровій дошці, а в вправі 983 – обмін місцями чотирьох чи двох букв), у противному випадку видається відповідне повідомлення, ситуація залишається незмінною. Програма також зобов’язана відслідковувати досягнення цільової ситуації, наприклад, чи вгадане задумане число (вправа 986), чи розставлені необхідним чином букви (вправа 983), чи переміщені всі диски (вправа 978) і т.д.

*) Розробка і реалізація ігрових програм повинна вестись з урахуванням графічних й звукових можливостей, наданих конкретним комп’ютером. При наявності алфавітно-цифрового дисплея ігрові ситуації і ходи відображаються, як правило, при допомозі чисел, букв і псевдографіки. При наявності графічного дисплея – ілюструються графічно. Так, наприклад, при грі в “нім” (вправа 1012) купки сірників можуть замінятися натуральними числами, якщо дисплей алфавітно-цифровий, чи бути намальованими, якщо дисплей графічний. Гра “вгадування дробів” (вправа 984) при роботі на алфавітно-цифровому дисплеї зводиться до обміну текстовими повідомленнями: граючий вводить число, програма повідомляє, чи вірно зазначений дріб. При роботі з графічним дисплеєм оцінка правильності введенного дробу може виконуватися, наприклад, за допомогою стрілки, що летить у напрямку до аеростата і “проколює” його, якщо дріб названий правильно, чи пролітає мимо в противному випадку. При наявності звукогенератора гри варто супроводжувати характерними звуковими сигналами. Так, наприклад, у попередній грі такими сигналами можуть бути свист стріли, що летить, чи звук аеростата, що лопнув.

Програми другої групи (вправи з 997 по 1006), так звані навчальні програми, мають на меті закріплення в того, хто навчається, тих чи інших знань чи навичок. При написанні програм важливо правильно чергувати передбачувані питання (один з можливих алгоритмів вибору питань даний у розділі “Випадкові числа”), і вчасно підвищувати рівень їхньої складності. Наприклад в програмі для навчання усній лічбі (вправа 997) підвищення рівня складності передбачуваного завдання може бути зв’язане з переходом від арифметичних дій над однозначними числами до дій над двоох-, трьох- і т.д. значними числами. У програмі навчання роботі з клавіатурою (вправа 1000) – з переходом від окремих букв і цифр до слів і фраз, а також зі зменшенням часу, що виділяється для набору на клавіатурі того чи іншого слова

Кожна з програм третьої групи (вправи 1007–1013) є рівноправним партнером в тій чи іншій грі, наприклад, у шахи, “нім”, “100 сірників” і ін. Крім усіх дій, виконуваних програмами першої групи, ці програми повинні робити ігрові ходи.

Вправа №972. “Сім лунок”. Вздовж дошки розташовано 7 лунок, у яких лежать 3 чорних й 3 білих кулі так, як показано на Рис. 106. Пересунути чорні кулі на місце білих, а білі – на місце чорних. Кулю можна пересувати або в сусідню з ним порожню лунку, або в порожню лунку, що знаходиться безпосередньо за найближчою кулею.

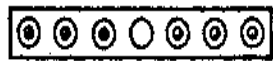


Рис. 106

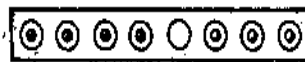


Рис. 107

Вправа №973. “Стрибучі кульки”. Ця гра схожа на попередню. Вихідна позиція – 8 лунок, у яких розставлені 4 чорних і 3 білих кульок (Рис. 107). Поміняти місцями чорні і білі кулі. На відміну від попередньої гри чорні кулі можна пересувати тільки вправо, а білі тільки вліво.

Вправа №974. Уздовж дошки розташовані лунки й у кожній лунці лежить куля чорного чи біло* го кольору (приклад приведений на мал. 108, а). Одним ходом дозволяється змінювати місцями дві будь-яких кулі. Домогтися того, щоб спочатку йшли білі кулі, а за вони-чорні (мал. 108, б). Якщо загальне число лунок дорівнює p , те для рішення задачі досить зробити не більш $\lfloor p/2 \rfloor$ ходів.



Рис. 108

Вправа №975. Нехай тепер, на відміну від попередньої задачі, у кожній лунці лежить червона, біла чи синя куля. Одним ходом дозволяється змінювати місцями дві будь-яких кулі. Домогтися того, щоб усі червоні кулі йшли першими, усі синіми – останніми, а білі – посередині. Це варіант “задачі про голландський прапор” (поле голландського прапора розділено на три смуг-синю, білу, червону). Якщо загальне число лунок дорівнює n , то для рішення задачі досить зробити не більш $n-1$ ходів.

Вправа №976. Залізничний сортувальний вузол улаштований так, як показано на Рис. 109. На правій стороні зібране деяке число вагонів двох типів (на Рис. 109-чорні і білі), обох типів по n штук. Тупик може вміщати

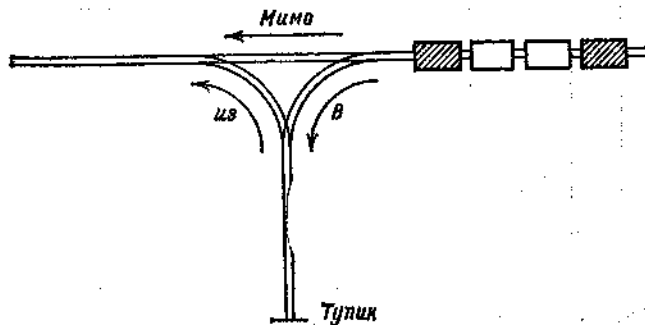


Рис. 109

усі $2n$ вагонів. Користаючись трьома сортувальними операціями: В, З, МІМО, зібрати вагони на лівій стороні так, щоб типи чергувалися. Для рішення вправи досить $3n-1$ сортувальних операцій.

Вправа №977. “Розміщення меблів”. Площа розділена на шість квадратів, п’ять з них зайняті меблями, шостий – вільний (Рис. 110). Переставити меблі так, щоб шафа і крісло помінялися місцями, при цьому ніякі два предмети не можуть стояти на одному квадраті.

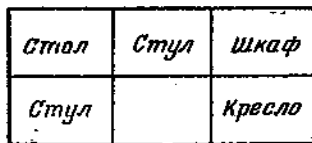


Рис. 110

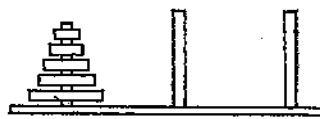


Рис. 111

Вправа №978. ● “Ханойська вежа”. Дошка має три кілочки. На першому нанизано m дисків, діаметр яких до верху зменшується (Рис. 111). Розташувати диски в тім же порядку на іншому кілочку. Диски можна перекладати з кілочка на кілочок по одному. Класти більший диск на менший не дозволяється.

Вправа №979. ● “П’ятнадцять”. На квадратному полі розміром 4×4 при допомозі датчика випадкових чисел розставлені 15 фішок з номерами від 1 до 15 (Рис. 112, а). Мається одна вільна позиція. Розставити фішки по зростанню їхніх номерів так, як показано на Рис. 112, б чи в. Пересувати фішки можна тільки на сусідню вільну позицію.

1	13	12	2
11	7	6	10
9	3	5	15
	4	8	14

a

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

б

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

в

Рис. 112

Вправа №980. “Розміщення 16 букв”. У квадраті розміром 4×4 клітки розставити 16 букв (чотири *a*, чотири *b*, чотири *c*, чотири *d*) так, щоб у кожному горизонтальному й у кожному вертикальному ряді будь-яка буква зустрічалася тільки один раз.

Вправа №981. “Розміщення трьох чисел”. У кожній з 9 кліток квадрата розміром 3×3 клітки поставити одне з чисел 1, 2, 3 так, щоб сума чисел, що стоять у кожному вертикальному ряді, у кожному горизонтальному ряді, а також по будь-якій діагоналі дорівнювала 6.

Вправа №982. “Розміщення дев’яти чисел”. У квадраті розміром 3×3 клітки розставити числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, щоб суми чисел, що стоять у кожному вертикальному ряді, у кожному горизонтальному ряді, а також на будь-якій діагоналі були рівні.

Вправа №983. “Обертотий квадрат”. Дано квадрат розміром 4×4 клітки, у яких за допомогою датчика випадкових чисел розставлені букви від *A* до *P* (Рис. 113, *a*). Упорядкувати букви в квадраті за алфавітом (Рис. 113, *б*). Квадрат має під квадрати, які можна обертати по годинниковій стрілці на одну клітинку. Піл квадрати мають розмір 2×2 й вказується номером лівої верхньої клітинки. Мається операція, що може бути виконана тільки один раз: обмін місцями двох букв.

<i>A</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>B</i>
<i>E</i>	<i>G</i>	<i>M</i>	<i>O</i>
<i>N</i>	<i>D</i>	<i>I</i>	<i>F</i>
<i>K</i>	<i>L</i>	<i>H</i>	<i>J</i>

a

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>

б

Рис. 113

Вправа №984. “Вгадування дробів”. До каната прикріплені три аеростати (Рис. 114). Якщо вважати, що один кінець каната має координату 0, а другий – координату 1, то координати аеростатів задаються деякими числами з інтервалу $(0, 1)$. Визначити ці числа похибкою, що не виводить за межі аеростата (див. примітка до § 33).

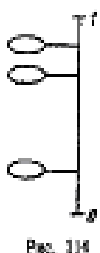


Рис. 114

Вправа №985. “Зелені кулі”. Дано поле з осями координат (Рис. 115). По полю розкидані невеликі круги. Указати набір функцій, графіки яких перекреслюють усі кола.

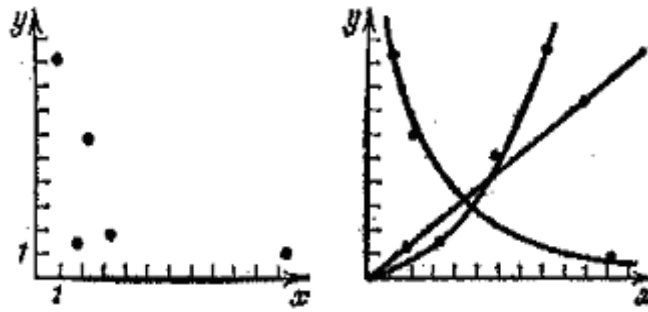


Рис. 115

Вправа №986. “Угадай число”. Програма за допомогою датчика випадкових чисел вибирає число в діапазоні від 0 до 9. Угадати це число за три спроби. Після кожної спроби повідомляється, чи більше чи менше назване число за задумане.

Вправа №987. “Кістки”. Граючий називає кожне число в діапазоні від 2 до 12 і ставку, що він робить у цей хід. Програма за допомогою датчика випадкових чисел двічі вибирає числа від 1 до 6 (“кидає кубик”, на гранях якого цифри від 1 до 6). Якщо сума цифр, що випали, менше 7 і граючий задумав число менше 7, він виграє зроблену ставку. Якщо сума цифр, що випали, більше 7 і граючий задумав число більше 7, він також виграє зроблену ставку. Якщо граючий угадав суму цифр, він одержує в чотири рази більше очок, ніж зроблена ставка. Ставка програна, якщо не має місце жодна з описаних ситуацій. В початковий моменту граючого 100 очок.

Вправа №988. “Іподром” Гравець вибирає одного з двох коней, що змагаються на бігах, і виграє, якщо його кінь приходить перший. Швидкість пересування коней на різних етапах вибирається програмою за допомогою датчика випадкових чисел.

Вправа №989. “Гра в слова”. Програма вибирає слово і малює на екрані стільки прочерків, скільки букв у цьому слові. Відгадати, яке слово загадане програмою. У кожен хід гравець вказує одну букву. Якщо названа буква, що входить до складу слова, вона підставляється замість відповідного прочерку. У противному випадку граючий втрачає 1 очко. У початковий момент у граючого 15 очок.

Вправа №990. “Корови і бики”. Програма вибирає за допомогою датчика випадкових чисел чотиризначне число з різними цифрами. Вгадати це число. На кожному кроці граючий називає чотиризначне число, а програма повідомляє, скільки цифр числа угадано (бики) і скільки цифр вгадане і стоїть на потрібному місці (корови). Наприклад, якщо програмою загадане число 1294, а граючий назвав 1423, він одержить відповідь “1 корова, 3 бики”.

Вправа №991. "Життя". Гра моделює життя поколінь гіпотетичної колонії живих кліток, що виживають, чи розмножуються або гинуть у відповідності з наступними правилами. Клітинка виживає, якщо і тільки якщо вона має двох чи трьох сусідів з восьми можливих

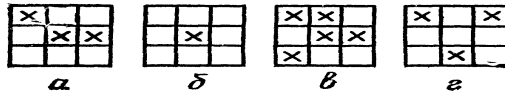


Рис. 116

(Рис. 116, а). Якщо в клітці тільки один сусід або жодного, вона гине в ізоляції (Рис. 116, б). Якщо клітка має чотирьох чи більш сусідів, вона гине від перенаселення (Рис. 116, в). У будь-якій порожній позиції, у якої рівно три сусіди, у наступному поколінні з'являється нова клітка (мал. 116, г).

Вправа №992. "Підбери ключі". Перед граючим чотири замкнені двері. Відкрити всі двері, маючи десять ключів, кожний з яких може відкрити кілька дверей. Дається 14 спроб.

Вправа №993. Потрібно ввести курсор в область екрана (невелике коло), розташування якого невідомо граючому. Пересування курсору супроводжується звуковим сигналом; якщо курсор наближається до області, то звук стає вище; якщо віддаляється – нижче.

Вправа №991. "Морський бій". На поле 10×10 позицій стоять невидимі ворожі кораблі: 4 кораблі по 1 клітці, 3 кораблі по 2 клітки, 2 кораблі по 3 клітки, 1 корабель у 4 клітки (Рис. 117). Необхідно вразити кожну з кліток з кораблями. Позиції вказуються українськими буквами від А до К (по рядках) і цифрами від 1 до 10 (по стовпцях). Конфігурація і положення кораблів на полі вибираються за допомогою датчика випадкових чисел. Якщо клітка корабля вгадана граючим вірно, вона відзначається хрестом; у протилежному випадку крапкою.

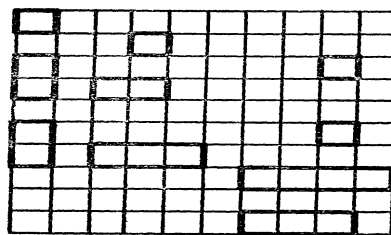


Рис. 117

Вправа №992. "Міст". Дано міст з арками різної ширини (Рис. 118), у нижньому рядку екрана розташований м'яч, яким можна керувати: м'яч можна переміщати по рядку, зупиняти у потрібній позиції рядка і котити до моста. Очки нараховуються, якщо м'яч проходить через арку.



Рис. 118

Вправа №993. “Збий літак”. По екрані летять ворожі літаки. Мета – збити їх. Пускова установка знаходиться в нижньому рядку екрана. Пускову установку можна переміщати по рядку вперед та назад.

Вправа №994. Скласти програму для навчання усній лічбі. На кожному кроці повинні пропонуватися числа й арифметичні дії, які варто виконати над цими числами.

Вправа №995. Скласти програму для навчання перекладу чисел з десяткової системи числення в двійкову і назад. Програма повинна пропонувати десяткове (двійкове) число, обране за допомогою датчика випадкових чисел, учень – назвати це число в двійковій (десятковій) системі числення.

Вправа №996. Скласти програму для навчання перекладу чисел із вікової системи числення у восьмеричну і шістнадцятиричну і назад (див. попередню вправу).

Вправа №1000. Скласти програму навчання роботі з клавіатурою. Програма повинна видавати на екран букви, цифри, слова і фрази, які варто набрати на клавіатурі.

Вправа №1001. Скласти програму, що допомагає в запам’ятовуванні історичних дат. Програма повинна пропонувати питання, що контролюють знання дат історичних подій, наприклад, “У якому році була Куликівська битва?” Якщо відповідь правильна, повинно бути запропоноване наступний питання. Якщо відповідь не вірна, програма підкаже правильну відповідь, а пізніше повторить це ж питання ще раз.

Вправа №1002. Скласти програму для завчання слів іноземної мови. Програма повинна пропонувати слова з деякого списку на одній мові, учень – дати переклад цього слова на іншу мову.

Вправа №1003. Скласти програму для вивчення сузір’їв. Програма повинна будувати на екрані зображення сузір’я, учень – назвати його.

Вправа №1004. Скласти програму для тренування пам’яті. Програма повинна висвітити на екрані кілька крапок, гравець – вказати, у якому порядку ці крапки були висвітлені. Координати крапок вибираються в програмі за допомогою датчика випадкових чисел.

Вправа №1005. Скласти програму, що допомагає у вивченні коливань математичного маятника. Маятник повинний рухатися на екрані, роблячи гармонійні коливання, період яких обраний за допомогою датчика випадкових чисел. Граючий повинний вказати довжину нитки, на якій підвішений маятник. Відповідь вважається правильним, якщо помилка не перевищує 10 %.

Вправа №1006. Скласти програму, що допомагає у вивченні руху тіла, кинутого під кутом до горизонту з деякою початковою швидкістю. Граючий, знаючи відстань від людини, що кидає камінь, до лунки і ширину лунки, повинен задати такі значення кута α і початкової швидкості v , щоб камінь потрапив у лунку. На екрані повинні зображуватися поверхня землі, лунка, камінь і траєкторія польоту каменю. Відстань від людини, що кидає камінь, до лунки і ширину лунки варто вибирати за допомогою датчика випадкових чисел.

Вправа №1007. Написати програму, що грає в “хрестики-нулики”.

Вправа №1008. Написати шахову програму, що грає за білих:

- а) королем і ферзем проти короля;
- б) королем і двома турами проти короля.

Вправа №1009. “100 сірників”. З купки, що в спочатку мала 100 сірників, двоє граючих по черзі беруть по кілька сірників: не менш однієї і не більше десяти. Програє хто взяв останній сірник.

Вправа №1010. В умові попередньої вправи вноситься зміна: хто взяв останній сірник виграє.

Вправа №1011. “Угадай число”. Один із граючих задумує число від 1 до 1000, інший намагається вгадати його за десять питань виду: чи вірно, що задумане число більше такого-то числа. Написати програму, що грає за того, хто відгадує.

Вправа №1012. “Нім”. Маються три купки сірників. Двоє граючих по черзі роблять ходи. Кожен хід полягає в тім, що з однієї якоїсь купки береться довільне ненульове число сірників. Виграє хто взяв останній сірник.

Вправа №1013. “Цзяньшидзи”. Маються дві купки каменів. Двоє граючих по черзі роблять ходи. Кожен хід може складатися в одному з двох;

- 1) береться довільне ненульове число каменів з якоїсь однієї купки;
- 2) береться одночасно по однаковому ненульовому числу каменів з обох купок.

Виграє хто взяв останній камінь. Пара (a, b) , де a і b – кількість каменів у купках при $a < b$, є програшною, якщо число a закінчується в “фібоначчівій” системі (див. вправу 604) парним числом нулів, а число b виходить з a приписуванням ще одного нуля наприкінці.

§ 34. Предмети і групи предметів з фіксованими властивостями

Вправа №1014. *Магічним квадратом порядку n* називається квадратна таблиця розміру $n \times n$, складена з чисел $1, 2, \dots, n^2$ так, що суми по кожнім стовпці, кожному рядку і кожній із двох діагоналей рівні між собою. Дана цілочисельна квадратна матриця порядку 5; визначити, чи є вона магічним квадратом.

Вправа №1015. *Латинським квадратом порядку n* називається квадратна таблиця розміру $n \times n$, кожний рядок і кожен стовпець якої містить числа $1, 2, \dots, n$. Дана цілочисельна квадратна матриця порядку 5; визначити, чи є вона латинським квадратом.

Вправа №1016. Дана цілочисельна матриця $[a_{ij}]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$, кожен елемент якої дорівнює 0, 1, або 3. Визначити кількість четвірок $a_{ij}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1}$, в кожній з яких усі всі елементи різні.

Вправа №1017. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Встановити, чи є ця послідовність періодичною (тобто чи може бути одержаною повторенням деякої своєї початкової частини). З усіх періодів указати найменший.

Вправа №1018. Дані дійсні числа $a_1, \dots, a_n$. Знайти самий довгий відрізок $a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+m}$ даної послідовності, Елементи якого задовольняють співвідношення $a_p < a_{p+1} > a_{p+2} < \dots > a_{p+m}$.

Вправа №1019. Дано цілі числа $a_1, \dots, a_n$. Чи є послідовність $a_1, \dots, a_n$ перестановкою чисел $1, \dots, n$?

Вправа №1020. Елемент матриці називається сідловою точкою, якщо він одночасно є найменшим у своєму рядку і найбільшим у своєму стовпці. Дано дійсну матрицю розміру 5×6 . З'ясувати, чи є сідлові точки в цій матриці, і якщо є, то вказати індекси однієї з них.

Вправа №1021. Відома гра на придумування слів, що складаються з тих же букв, що і деяке фіксоване слово-зразок. Наприклад, із слова ПАСКАЛЬ можна одержати слова ЛАК, ЛАСКА, СКЕЛЯ і т.д. Кратні входження деякої букви в одержуване слово допускається, якщо ця буква з меншою кратністю входить у слово-зразок. Нехай дана послідовність слів, розділених пробілами. Приймаючи, що перше слово в послідовності є зразок, вибрати ті з інших членів послідовності, що можуть бути одержані із зразка по вказаному вище правилу. Максимально можливу довжину слова вважати рівним 15.

Вправа №1022. На квадратному листі картонного папера розміру 8×8 кліток намальовано кілька прямокутників, кожен прямокутник складається з кліток, різні прямокутники не накладаються один на одного і не доторкаються

стосуються (див. приклад на Рис. 119). Дана цілочисельна квадратна матриця порядку 8, у якій елемент дорівнює 0, якщо відповідна клітка належить якому-небудь прямокутнику, і відмінний від нуля в протилежному випадку. Визначити число прямокутників.

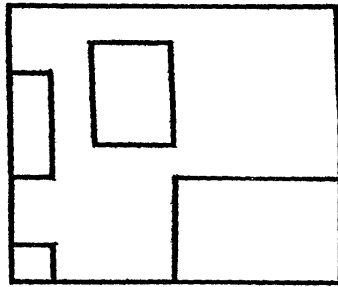


Рис. 119

Вправа №1023. Дана цілочисельна матриця $[a_{ij}]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$. Прямокутником в цієї матриці будемо називати безліч всіх елементів a_{ij} для яких виконано $1 \leq p \leq i \leq q \leq n$, $1 \leq r \leq j \leq s \leq m$ де p, q, r, s – натуральні числа, що задають прямокутник. Площею прямокутника назвемо число елементів у ньому.

Серед прямокутників матриці, що складаються цілком з нулів, знайти той, котрий має найбільшу площу.

Вправа №1024. Дана цілочисельна матриця розміру $n \times m$, у якій маютья рівно два однакових елементи. Знайти індекси цих елементів.

Вправа №1025. Поле шахівниці задається парою натуральних чисел: перше вказує номер вертикалі при рахунку з ліва на право, друге – номер горизонталі при рахунку знизу вгору. Розміщення фігур задається таким чином, що спочатку вказуються поля, на яких стоять перераховані білі фігури, потім – поля, на яких стоять перераховані чорні фігури.

а) На дошці стоять два ферзі. Указати поля, на які може піти білий ферзь так, щоб не потрапити під удар чорного ферзя.

б) У білих на дошці залишився тільки король, у чорних – король, кінь, слон. Охарактеризувати положення білих за допомогою слів: мат, шах, пат, звичайна позиція.

Вправа №1026. “Тестування колективу”. Нехай цілочисельна матриця розміру $n \times m$ містить інформацію про учнів деякого класу з n чоловік: j -ий рядок містить інформацію про i -го учня. У першому стовпці проставлений вік у роках, у друг – зріст у см, у третьому – успішність (округлений середній бал) і т.д. Учень називається середньостатистичним по k -му параметрі (унікальним по k -му параметрі), якщо на ньому досягається мінімум (максимум) модуля різниці середнього арифметичного чисел з k -го стовпця і значення k -го параметра цього учня. Учень називається самим унікальною (самим середньостатистичним), якщо він унікальний (є середньостатистичним) по найбільшій кількості параметрів. По матриці зазначеного виду визначити номери учнів:

- а) самих унікальних;
- б) самих середніх;
- в) самих середніх серед самих унікальних;
- г) самих унікальних серед самих середніх.

Вправа №1027. Правильний вираз в дужках виходить з деякого математичного виразу, що містить круглі дужки, викреслюванням усіх знаків, крім круглих дужок. Наприклад, з вираз $a-b(c+2(x+y(z+1)))+\dots + a(c+x)$ виходить правильний дужковий вираз $((()))()$. Більш точний опис безлічі правильних дужкових виразів:

- 1) $()$ – правильний дужковий вираз;
- 2) якщо P — правильний дужковий вираз, то (P) правильний дужковий вираз;
- 3) якщо P и Q – правильні дужкові вирази, то PQ —правильний дужковий вираз.

Дано натуральне число n і послідовність символів $c_1, \dots, c_{2n}$, кожний з яких – кругла дужка. Визначити, чи є послідовність $c_1, \dots, c_{2n}$ правильний дужковий вираз.

§ 35. Перебір і його скорочення

Вправа №1028. Дані натуральні числа $m, a_1, \dots, a_n$. У послідовності $a_1, \dots, a_n$ вибрати підпослідовність $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ ($0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) таку, що $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} = m$.

Якщо таку підпослідовність вибрати неможливо, то необхідно сповістити про це.

При рішенні цієї вправи корисні наступні міркування. Щоб вибрати підпослідовність $a_1, \dots, a_n$ з послідовності $a_1, \dots, a_n$ потрібно про кожен член $a_1, \dots, a_n$ вирішити, приймається він у чи підпослідовність чи ні. Може виникнути наступна ситуація: щодо членів $a_1, \dots, a_i$ ($i < n$) прийняті якісь рішення, після цього виявилось, що, як би ми не розпоряджалися іншими $n-i$ – членами, нам усе рівно не вдасться одержати підпослідовність, що задовольняє поставленій умові (наприклад, якщо сума декількох позитивних чисел більше m , то неможливо додати до них ще кілька позитивних чисел так, щоб сума стала рівною m). У цьому випадку можна відразу виключити з розгляду усі підпослідовності, перші члени яких обрані з $a_1, \dots, a_i$ відповідно до прийнятих рішень.

Вправа №1029. Одержати всі розміщення 8 тур на шахівниці, при яких жодна тура не загрожує інший.

Тут корисне розуміння, аналогічне приведеній у попередній вправі. Якщо розставлені тури в i перших вертикалях ($i < 8$) і виявилось, що i -а тура

загрожує турі в якійсь вертикалі з меншим номером, то можна далі не займатися тими розміщеннями тур, які припускають те ж саме розміщення в перших вертикалях *).

Вправа №1030. Дано натуральне число m . Одержати m розстановок 8 ферзів на шахівниці, при яких жоден із ферзів не загрожує другому. Якщо m більше, ніж загальне число таких розміщень, то варто одержати всі розміщення.

Вправа №1031. Одержати всі перестановки елементів $1, \dots, 6$.

Вправа №1032. Одержати всі сполучення з 10 елементів $1, \dots, 10$, по 4 елементи в кожному.

Вправа №1033. Одержати всі розміщення з 9 елементів $1, \dots, 9$, по 5 елементів у кожному.

Вправа №1034. Одержати всі повні перестановки 10 елементів $1, \dots, 10$ (перестановка $p_1, \dots, p_n$ елементів $1, \dots, n$ називається повною, якщо $p \neq i$ для $i = 1, \dots, n$).

Вправа №1035. Вказати маршрут коня, що починається на одному заданому полі шахівниці і закінчується на іншому. Ніяке поле не повинне зустрічатися в маршруті двічі.

Вправа №1036. Лабіринт може бути заданий матрицею з'єднань, у якій для кожної пари кімнат зазначено, чи з'єднані вони коридором (див. вправу 626). Дана матриця з'єднань для лабіринту з n кімнат і номера кімнат i, j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$). Побудувати шлях з кімнати з номером i в кімнату з номером j .

Вправа №1037. Дано матрицю з'єднань деякої лінії (див. вправу 626), що містить 6 вузлів. З'ясувати, чи існує замкнутий шлях, що складається з деяких ланок лінії, що проходить через кожний з 6 вузлів рівно один раз. Якщо такий шлях існує, то побудувати відповідну йому послідовність номерів вузлів. (Для лінії, зображеної на Рис. 33, послідовність вузлів буде, наприклад, 1, 2, 3, 4, 5, 6.)

Вправа №1038. Мається n міст. Деякі з них з'єднані дорогами відомої довжини. Уся система доріг задана квадратною матрицею порядку n , елемент a_{ij} якої дорівнює деякому негативному числу, якщо місто i не з'єднане прямо дорогою з містом j і дорівнює довжині дороги в противному випадку ($i, j = 1, \dots, n$).

а) Для 1-го міста знайти найкоротші маршрути в інші міста.

*) Такого роду розуміння виявляються корисними і при рішенні всіх таких наступних задач цього параграфа.

б) в припущенні, що кожне місто з'єднане напряму дорогою з кожним, знайти найкоротший маршрут, що починається в першому місті і проходить через всі решту.

Вправа №1039. Знайти таку розстановку п'яти ферзів на шахівниці, при якій кожне поле знаходиться під ударом одного з них.

Вправа №1040. Знайти таке розміщення дванадцяти коней на шахівниці, при якій кожне поле буде знаходитись під ударом одного з них.

Вправа №1041. Знайти таке розміщення восьми слонів на шахівниці, при якій кожне поле буде знаходитися під ударом одного з них.

Вправа №1042. У даній послідовності дійсних чисел $a_1, \dots, a_{20}$, вибрати зростаючу послідовність найбільшої довжини.

Вправа №1043. Побудувати всі правильні скобкові вираження (див. вправу 1027) довжини 10, тобто ті, котрі містять по 5 лівих і по 5 правих круглих дужок.

Вправа №1044. Мається n предметів, маси яких рівні $a_1, \dots, a_n$. Розділити ці предмети на двох груп так, щоб загальні маси двох груп були максимально близькі.

Вправа №1045. Одержати послідовність $a_1, \dots, a_n$ цифр 0, 1, 2, у якій немає суміжних однакових ділянок (наприклад, послідовність 2, 0, 1, 1, ... не підходить, тому що поруч розташовані два однакових члени 1; послідовність 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, ... не підходить, тому що поруч розташовані дві однакових ділянки 2, 1, 0, 1 і т.д.).

Вправа №1046. ”Вправа про рюкзак”. Мається m різних предметів, відома маса кожного предмета і його вартість. Визначити, які предмети треба покласти в рюкзак, щоб загальна маса не перевищувала заданої границі, а загальна вартість була максимальна. Вирішити цю вправу для m предметів, маси яких у кілограмах рівні $p_1, \dots, p_m$, вартості – $c_1, \dots, c_m$. Маса рюкзака не повинна перевищувати 50 кг.

§ 36. Деякі прийоми програмування*)

Вправа №1047. При програмуванні практичних задач часто приходиться працювати з різними списками. Прикладами можуть служити список учнів 9а класу, список учителів, що викладають літературу у всіх 10-х класах школи, список учасників спортивної гри і т.п. Кожен елемент списку містить, як правило, кілька полів. Наприклад, елементи списку випускників школи можуть включати ім'я і прізвище учня, а також його середній бал по атестату.

Представлення списків у пам'яті ЕОМ може бути засноване на послідовному і на зв'язаному розподілі пам'яті. При послідовному розподілі елементи списку (будемо також називати їх вузлами) розміщуються послідовно, один за іншим. При зв'язаному розподілі пам'яті місце розташування кожного елемента заздалегідь невідомо – блок пам'яті, що виділяється для розміщення окремого елемента, виділяється з однієї більшої області пам'яті по спеціальних алгоритмах (див. вправу 1052). Тому усі вузли містять принаймні одне додаткове поле – поле зв'язку з наступним (Рис. 120, а) чи попереднім вузлом (Рис. 120,б) (див. також вправи 531 і 532).

На Рис. 120 FIRST – це змінна, що вказує на перший вузол у списку; LAST – змінна, що вказує на останній вузол у списку; стрілки позначають зв'язки між вузлами; NIL – значення поля зв'язку, що говорить про те, що даний вузол не зв'язаний ні з яким іншим вузлом (є останнім на Рис. 120, а і першим на Рис. 120, б).

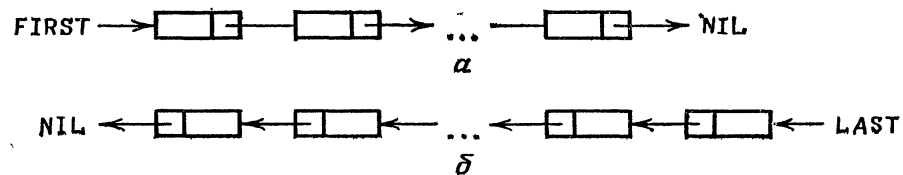


Рис. 120

Зв'язаний розподіл пам'яті забезпечує істотно більш високу гнучкість при роботі зі списками, чим послідовний розподіл, значно спрощуючи включення нового вузла в список і виключення з нього.

Найбільше часто використовуються наступні види зв'язаного розподілу пам'яті (далі, під терміном *список* ми будемо розуміти конкретне представлення відповідної інформаційної структури в пам'яті ЕОМ на основі зв'язаного розподілу пам'яті):

1) Однозв'язні списки, у яких кожен елемент містить поле зв'язку або з наступним, або з попереднім елементом списку (Рис. 120).

2) Однозв'язані циклічні списки, у яких останній елемент містить поле зв'язку з першим елементом (Рис. 121) (див. вправу 545).

*) Вправи цього розділу призначені тим, хто хоче додатково опанувати деякими прийомами, що використовуються в сучасному програмуванні не менш широко, ніж, скажемо, вкладені цикли. Це прийоми роботи з розвитими інформаційними структурами: лінійними списками і деревами, а також прийоми керування динамічною пам'яттю.

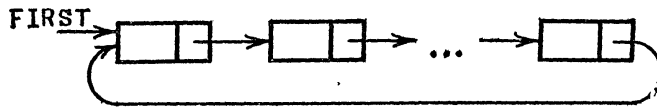


Рис. 121

3) Двосв'язані списки, у яких кожен елемент містить поле зв'язку з наступним елементом і з попереднім (Рис. 122) (див. вправу 533).

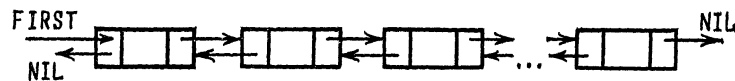


Рис. 122

При роботі з лінійними списками потрібно, як правило, виконувати наступні операції [34]:

- 1) Одержати доступ до k -го вузла списку, щоб проаналізувати і/або змінити вміст його полів.
- 2) Включити новий вузол безпосередньо перед k -м вузлом.
- 3) Виключити k -й вузол.
- 4) Об'єднати два (або більш) списку в один список.
- 5) Розбити список на два (чи більш) списки.
- 6) Зробити копію списку.
- 7) Визначити число вузлів у списку.
- 8) Виконати сортування вузлів списку позначенням деяких полів.
- 9) Знайти в списку вузол із заданим значенням якогось поля.

Скласти процедури, що реалізують перераховані вище операції 1)–9) для роботи з однозв'язаними, однозв'язаними циклічними і двозв'язаними списками.

Вправа №1048. Одним з найбільше видів списку що найчастіше зустрічаються є стек-список, у якому усі включення виключення робляться тільки на одному його кінці – вершина стеку (Рис. 123). Механізм функціонування стеку добре відображений в іншій його назві – список типу “LIFO” (last in first out – “останнім увійшов – першої вийшов”)

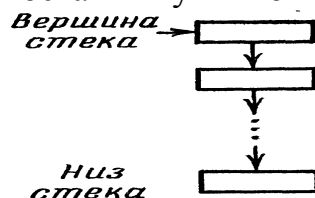


Рис. 123

При роботі зі стеком передбачаються дві операції: занесення чергового елемента у вершину стеку і видалення елемента, що знаходиться у вершині стеку. Тим самим операція видалення елемента зі стеку може бути застосована тільки до елемента, поміщеному в стек самим останнім. І, отже, будь-який елемент не може бути вилучений зі стеку раніш, ніж будуть вилучені всі елементи, поміщені в стек після нього.

Скласти процедури, що реалізують операції занесення елемента в стек і видалення елемента з його вершини.

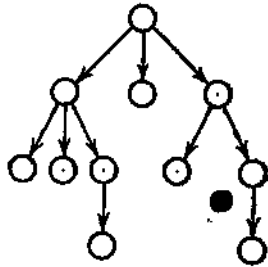


Рис. 124

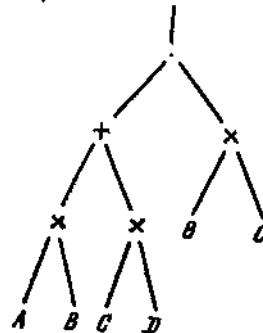


Рис. 125

Вправа №1049.. Ще один з найбільш важливих видів структур, що зустрічаються в програмуванні, являють собою дерева. Формальне дерево (Рис. 124) визначається як кінцева множина T , що складається з одного чи більш вузлів таких, що

- 1) мається один вузол, названий коренем дерева;
 - 2) інші вузли (крім кореня) містяться $m > 0$ попарно непересічних множинах $T_1 \dots, T_m$ кожне з яких у свою чергу є деревом;
- дерева $T_1 \dots, T_m$ називаються піддеревами даного кореня.

Дерева, як правило, дають добре представлення про структуру відношення між елементами даних. Так, наприклад, на Рис. 125 показане дерево, що представляє формулу $(AB+CD)/BC$. Тут вітка, що відходить від вершини / уліво, представляє чисельник дробу, а вітка, що відходить вправо, – її знаменник і т. д.

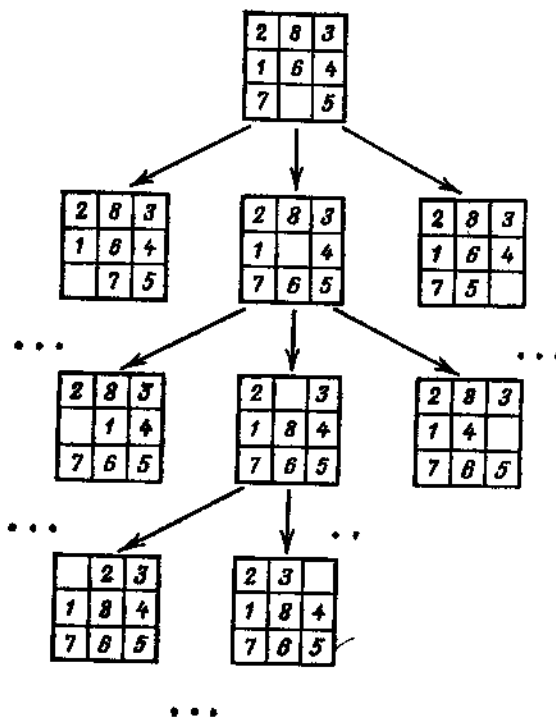


Рис. 126

Ще один приклад-фрагмент дерева (Рис. 126), що показує можливі ходи при грі у вісьмох (ця гра аналогічна грі в п'ятнадцять); вихідна і цільова позицій приведені відповідно на Рис. 127,*a* і 127,6 [41].

Далі ми будемо розглядати тільки бінарні дерева. Бінарне дерево визначається як кінцева множина вузлів, яка або порожня, або складається з кореня і двох бінарних дерев (Рис.. 128).

При роботі з деревоподібними структурами найбільше часто приходиться вирішувати задачу обходу дерев – такого послідовного проходження по вузлах дерева, коли кожен вузол зустрічається рівно один раз. Для обходу бінарного дерева можна скористатися одним із трьох способів: можна проходити вузли в префіксному порядку, в інфіксному порядку й у суфіксному порядку.

Префіксний порядок обходу дерева визначається у виді списку прохідних вузлів у такий спосіб. Якщо дерево не порожнє, префіксний порядок – це

корінь дерева;

вузли лівого піддерева в префіксному порядку;

вузли правого піддерева в префіксному порядку.

Інфіксний порядок обходу дерева визначається в такий спосіб. Якщо дерево порожнє, список вузлів порожній. Якщо дерево не порожнє, інфіксивний порядок – це

вузли лівого піддерева в інфіксному порядку;

корінь дерева;

вузли правого піддерева в інфіксному порядку.

Суфіксний порядок обходу дерева визначається в такий спосіб. Якщо дерево порожнє, список вузлів порожній. Якщо дерево не порожнє, суфіксний порядок – це

вузли лівого піддерева в суфіксному порядку;

вузли правого піддерева в суфіксному порядку;

корінь дерева.

Скласти процедури обходу заданого бінарного дерева в префіксному, інфіксному і суфіксному порядку.

Вправа №1050. Скласти процедуру підрахунку числа вузлів заданого бінарного дерева.

Вправа №1051. Листом дерева називається вершина, що не є коренем ніякого піддерева. Скласти процедуру підрахунку числа листів заданого бінарного дерева.

Вправа №1052. Алгоритмами динамічного розподілу пам'яті називають алгоритми, що дозволяють виділяти й вивільнювати різні по розміру блоки пам'яті, беручи їх з однієї великої області пам'яті. (Тут і далі використовуються терміни *блок* і *область*, що позначають сукупність суміжних комірок пам'яті.)

Будемо вважати, що вся наявна вільна пам'ять представлена у виді списку вільних блоків. У початковий момент у списку тільки один блок, що містить усю вільну пам'ять. Кожен блок містить заголовок з розмірами блоку і покажчиком на наступний блок. Виділення вільної пам'яті по запиті часто виконується або по методу “найбільш придатного”, або по методу “першого придатного”.

Метод “найбільш придатного” полягає в тому, що серед усіх блоків, що мають розмір, не менший необхідного, вибирається блок з найменшим розміром. Метод “першого придатного” полягає в тому, що виділенню підлягає перший в порядку перегляду елементів списку блок, розмір якого не менше необхідного.

Якщо блок, обраний по одному з двох зазначених методів, має розмір, що перевищує зазначений при запиті, він розщеплюється на два: перший блок має необхідний розмір і дається у відповідь на запит, другий блок – залишок – залишається в списку вільної пам'яті. При звільненні блоку суміжні блоки склеюються.

Реалізувати процедуру для виділення блоку вільної пам'яті заданого розміру (результатом роботи процедури повинна бути -1 , якщо блок такого розміру виділений бути не може) і процедуру для звільнення — повторного включення в список вільної пам'яті блоку, виділеного раніше.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамов С. О. Математичні побудови я програмування.—м.: Наука, 1978.
2. А б р а м о в С. О. Елементи програмування. – М.: Наука, 1982.
3. Абрамов С. О., Антипов І. Н. Основи програмування на алголе,—М.: Наука, 1980.
4. Абрамов С. О., Зима Е. В. Начала програмування мовою Паскаль.— М.; Наука, 1987.
5. Агафонов В.Н., Поттосін І.В., Бежанова Л. М., Сабельфельд В.К. Збірник вправ по програмуванню мовою ПАСКАЛЬ. – Новосибірськ: Вид-во Новосиб. ун-та, 1985.
6. Антипов І.Н., Бальцюк Н. Б., Щенніков В.В. Збірник задач і вправ по програмуванню на Алголе-60.— М.; Вид. МГПИ ім. В. І. Леніна, 1974.
7. Балугин А. Н., Даугавет В. А., Шидловская Н, А, Збірник вправ по АЛГОЛ–60.—М.: Наука, 1976.
8. Бауэр Ф. Л., Гнац Р., Хилл У. Інформатика, Задачі і рішення.—М.: Мир, 1978.
9. Баяковський Ю.М., Вьюкова Н.И., Галатенко до В. А., Ходулев А. Б. Конспект курсу програмування для учнів 9–10 класів математичної школи.— М.: Вид-во ИПМ АН СРСР ім. М. В. Келдиша, 1985.
10. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Довідник по математиці.—М.: Наука, 1986.
11. Брудно А. Л., Каплан Л. И. Олімпіади по програмуванню для школярів. – М.: Наука, 1985.
12. Бутумо И. Д., Самочадин А. В., Усанова Д. В. Програмування алгоритмічною мовою ПАСКАЛЬ для мікро-евм. –Л.: Вид-во Ленінградск. ун-та, 1985.
13. Бухтіяров А. М., Фролов Г. Д. Збірник задач по програмуванню на алгоритмічних мовах.—М.: Наука, 1974.
14. Ван Тассел Д. Стиль, розробка, ефективність, налагодження й іспит програм.—М.: Мир, 1981.
15. В и р т Н. Систематичне програмування, введення. – М. : Мир, 1977.
16. Вир Н. Алгоритми+структури даних = програми.—М.: Мир, 1985.
17. Г а р д н е р М. Математичні новели. —М.: Мир, 1974.
18. Гіглавий А. В., Гнездилова Г. Г., Гуткин М. Л., Програмування мовою бейсик для шкільної ЕОМ.—М.; Вид-во ОЦ АН СРСР, 1986.
19. Гіглавий А. В., Гнездилова Г. Г., Гуткин Д. Л. Додаткові можливості мови бейсик для шкільної ЕОМ.— М.: Вид-во ОЦ АН СРСР, 1986.
20. Говоров В.М., Дибов П.Т., Мірошин Н.В., Смірнова С.Ф. Збірник конкурсних задач по математиці.—М.: Наука, 1985.
21. Грогно П. Програмування на мові Паскаль. –М.: Наука 1982.
22. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для біологів.—М.: Вища школа, 1983,
23. Гутер Р. С., Мінаєва С. С., Резніковський П. Т. Задачник-практикум по програмуванню й обчислювальній математиці.—М.; Наука, 1973.

24. Дейкстра Э, Дисципліна програмування.—М.: Мир, 1978.
25. Демидович Б. П., Марон И.А. Основи обчислювальної математики.—М Наука, 1970.
26. Доморяд А.П., Математичні ігри і розваги.—М.:Физматгиз, 1961.
27. Дрейфус М., Гантлоф К. Практика програмування на фортрані. Вправи з коментарями.—М.: Мир, 1978,
28. Зверкина Т. С., Кольцова Л. А., Красовська И. А., Осіпов Ю. В., Сільська Н. С. Розгалуджені і циклічні алгоритми .—М: вид-во МИСИ, 1985.
29. Зверкина Т. С., Кольцова Л. А., Красовська І. А., Осіпов Ю. В., Сільська Н. С. Індексовані змінні у фортрані.— М.: Изд-во МИСИ, 1985.
30. Ігнатов Е. І. У царстві кмітливості. – М.: Наука, 1981.
31. Йенсен К., Вирт Н. Паскаль. Посібник для користувача й опис мови.—М.: Фінанси і статистика, 1982.
32. Касьянов В. Н., Сабельфельд В. К. Збірник завдань по практикуму на ЕОМ.—М.: Наука, 1986.
33. Кемені Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введення в кінцеву математику.—М.: Мир, 1965.
34. Кнут Д. Мистецтво програмування для ЕОМ. Т. 1. Основні алгоритми.—М.: Мир, 1976.
35. Кнут Д. Мистецтво програмування для ЕОМ. Т. 2. Напівчисельні алгоритми. —М.: Мир, 1977.
36. Кнут Д. Мистецтво програмування для ЕОМ. Т. 3. Сортування і пошук.—М.: Мир, 1978.
37. Лавров С. С. Універсальна мова програмування. —М.: Наука, 1972.
38. Ламуатъе Ж-П. Вправи по програмуванню на Фортрані IV.—М.: Мир, 1978.
39. Мак-Кракен Дж. Програмування на Алголе-М.: Мир, 1964.
40. Малоземов В. Н., Певний А. Б. Рекуррентні обчислення. – Л.: Вид-во Ленинградск. ун-та, 1976.
41. Н и л ь с о н Н. Штучний інтелект. Методи пошуку рішення.—М.: Мир, 1973.
42. Пантаева Е. В., Прохорова Т. В. РЕДАКТОР – мова для редагування текстів // Обробка символьної інформації. Вип. 3.— М.: Вид-во ОЦ АН СРСР, 1976. -з. 69–78.
43. Пильщиків В. Н. Вправи по мові паскаль.— М.: Вид-во МГУ 1986.
44. Поляк Т. Б. Цікаві задачі.— М.: Учпедгиз, 1948.
45. Пулькін С. П. Обчислювальна математика. – М.: Освіта, 1974,
46. Румшинский Л. З. Обчислювальний лабораторний практикум.—М.: Физматгиз, 1963.
47. Соболев І. М, Метод Монте-Карло.—М.: Наука, 1972.
48. Трифонов Н. П. Збірник вправ по алголу.—М.: Наука,
49. Трифонов Н. П., Пасхін Е, Н. Практикум роботи на ЕОМ.—М.: Наука, 1982.
50. Хинчин А. Я. Ланцюгові дробі.—М.; Наука, 1978.

51. Ш т е й н г а у з Г. Математичний калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.
52. Энджел Й. Практичне введення в машинну графіку.–М.; Радіо і зв'язок, 1984.
53. Hearn D., Bal M. P. Computer Graphics.–New Jersey, *Eng-lewood Clifs*: Prentis-Hall, 1986.
54. Hopgood F. R. A., Duce D. A., Gallop J. JR., Sutclif-fe D. C. Introduction to the graphical kernel system '6.K.S.' – Academic Press, 1983.
55. Introduction to MSX-Basic.–Sony Corporation, 1984.
56. Lee J. D., Beech G., Lee T. D. Computer programs that work!–Sigma Technical Press, 1979.
57. Sproull R. P., Sutherland Wi JR., Ullner M. K. Device-independent graphics with examples from IBM personal computers, – McGraw-Hill Book Company, 1985.

25 лютого 2003 року.